TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

VEERA HAKALA

SIRKUSTAIDE MATEMATIIKAN OPETUKSESSA

Diplomityö

Tarkastajat: Jorma Joutsenlahti, Terhi Kaarakka, Elina Viro
Palautettu: 20.12.2016

TIIVISTELMÄ

VEERA HAKALA: Sirkustaide matematiikan opetuksessa
Tampereen teknillinen yliopisto
Diplomityö, 88 sivua, 5 liitesivua
Joulukuu 2016
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Pääaine: Matematiikka
Tarkastaja: Jorma Joutsenlahti, Terhi Kaarakka, Elina Viro
Avainsanat: Sirkus, matematiikan opetus, geometria

Sirkusta kokeiltiin opetusmenetelmänä Tampereen normaalikoulun lukion pitkän matematiikan kolmannella kurssilla. Kokeilujakso kesti noin 8 oppituntia. Tuntien aiheet olivat ympyrä ja sen tangentti, kehäkulma, suorakulmainen särmiö, kulma avaruudessa, lieriö, kartio ja pallo. Sirkus näkyi opetuksessa muun muassa videoiden, laskuesimerkkien ja sirkusaiheisten toiminnallisten työpajojen muodossa. Kurssin aikana opiskelijat tekivät sirkusta ja matematiikka yhdistävän projektityön. Luokassa oli sirkusvälineitä, joita opiskelijat saivat käyttää vapaasti. Näitä välineitä olivat muun muassa hulavanteet, jonglöörauspallot, pedalo sekä tasapainopallo.

Suurin osa opiskelijoista koki sirkuksen positiivisena lisänä matematiikan opiskelussa. Kyselyyn (n=19) vastanneista 72% viittasi sirkuksen kasvattaneen motivaatiota tai tuoneen positiivista vaihtelua. Myös opetusta seuranneet opetusharjoittelijat kokivat sirkuksen motivoineen opiskelijoita, tuoneen konkretiaa oppitunneille ja helpottaneen hahmottamista. Sirkus opetusmenetelmänä auttoi opiskelijoita tuomaan koulussa opitut tiedot myös arkielämän sovelluksiin. Sirkus opetusmenetelmänä toteuttaa erinomaisesti uutta, syksyllä 2016 voimaan astunutta opetussuunnitelmaa.

Sirkusta opetusmenetelmänä tutkittiin kurssin opiskelijoiden, tutkimuksen suorittaneen opetusharjoittelijan sekä tunteja seuranneiden opetusharjoittelijoiden antaman palautteen perusteella. Sirkuksen vaikutusta oppimiseen ja matematiikan osaamiseen tutkittiin vertailemalla opiskelijoiden koesuoritusta edellisen vuoden vastaavan ryhmän suorituksiin. Sirkuksen avulla opiskelleet opiskelijat (n=21) pärjäsivät vertailuryhmää (n=31) paremmin kurssikokeessa, mutta erityisesti sen haastavimmissa tehtävissä, joissa opiskelijalta vaadittiin muutakin kuin matemaattisten kaavojen ulkoa muistamista. Näissä tehtävissä tarvittiin erityisesti oivaltamista sekä ongelmanratkaisun ja matemaattisen ajattelun taitoja. Sirkusta voidaan pitää onnistuneena opetuskokeiluna, jonka kehittämistä kannattaa jatkaa ja tutkimista syventää. Tämä tutkimus tarjoaa valmiin projektityöoppimateriaalin.

ABSTRACT

VEERA HAKALA: Circus art in mathematics education
Tampere university of technology
Master of Science Thesis, 88 pages, 5 Appendix pages
December 2016
Master's degree programme in Science and Engineering
Major: Mathematics
Examiner: Jorma Joutsenlahti, Terhi Kaarakka, Elina Viro
Keywords: Circus, mathematics education, geometry

Circus as a teaching method was studied on a geometry course of advanced mathematics in the Tampere University Teacher Training School. Research period for this study lasted eight lessons. Topics of the class were circle and its tangents, inscribed angle, rectangular prism, dihedral angles, cylinder, cone and sphere. During the research period, geometry was taught by means of circus by using video material, examples and circus themed workshops. In the research period students were able to practice circus disciplines such as hula hoops, juggling, pedalo and walking globes. Students also carried out a project that combined circus and mathematics.

Majority of the students experienced circus as a positive contribution to the mathematics education. 72 % of the survey respondents (n=19) thought that circus motivated and brought variety into the classroom. Also the student teachers who were observing the classes thought that circus motivated the students, brought concreteness to the teaching and made perceiving easier. Circus as a teaching method also helped the students to bring the learned lessons outside of the classroom. Circus as a teaching method fits into the new high school curriculum well.

Circus as a teaching method was examined on the basis of feedback from students, student teachers who were observing some of the lessons, and the student teacher who conducted this study. The impact on learning and mathematical competence was studied by comparing students' scores on course exam to scores of the control group. Students (n=21), who were taught by using circus as a teaching method, performed better in the course exam than the control group (n=31). They were better especially in more challenging type of assignments which, as opposed to just memorizing the right formulas, required deeper insight, problem-solving skills and mathematical thinking. The teaching experiment was successful and the method is worth developing. This study provides material for project-based learning.

ALKUSANAT

Tästä projektista on tullut kuluneen vuoden aikana itselleni todella tärkeä ja merkityksellinen. Kaikki tämä alkoi sirkusharrastuksesta vuonna 1999, ja nyt huomaan harrastuksen muuttuneen elämäntavaksi. Tästä syystä haluankin ensimmäisenä kiittää Sorin sirkusta paitsi sirkusvälineiden lainasta, myös korvaamattomasta nuorisosirkustyöstä sekä siitä mahdollisuudesta, että olen saanut vapaasti kehittää omaa opettajaidentiteettiäni avoimessa ja tukea antavassa työyhteisössä. Lisäksi haluan kiittää koko Tampereen normaalikoulun lukiota sekä erityisesti Kari Niemistä, joka toimi kannustavana ohjaavana opettajanani. Normaalikoulusta sain kannustusta ja uskallusta tehdä juuri niin kuin itse parhaiten osasin. Haluan kiittää myös äitiäni Marjo Nurmea ja ystävääni Henni Hakalaa oikoluvusta sekä tuesta ja kannustuksesta. Ison kiitoksen ansaitsevat myös avoimin mielin työtäni ohjanneet Jorma Joutsenlahti, Terhi Kaarakka sekä Elina Viro.

Koko tutkimusta on siivittänyt ajatus siitä, että valmiiksi osoitettu tie ei ole ainoa tie hyvään lopputulokseen. Opettajille on tavanomaista ottaa mallia omista entisistä opettajistaan, ja näin tahtomattaankin jarruttaa opetuksen kehittymistä ja uusien opetusmenetelmien löytymistä. Tämän takia haluan vielä saatteeksi lainata runoa, joka on ollut mielessäni koko diplomityön tekemisen ajan.

Tietä käyden tien on vanki.
Vapaa on vain umpihanki.
-A. Hellaakoski

Tampereella,
20.12.2016

Veera Hakala

SISÄLLYS

1. Johdanto 2

2. Draama ja liikunta oppimisen apuna 5
   - 2.1 Draama ja matematiikka 5
   - 2.2 Liikunnan vaikutukset oppimiseen 8

3. Pitkän matematiikan opiskelu lukiossa 11
   - 3.1 Matemaattinen osaaminen 11
   - 3.2 Matematiikkakuva 15
   - 3.3 Matematiikan arvioiminen PISA-tutkimuksissa 18
   - 3.4 Lukion opetussuunnitelman perusteet 19

4. Tutkimuksen suorittaminen 22
   - 4.1 Tutkimusongelmat 22
   - 4.2 Tutkimusaineiston kerääminen ja analysointi 23

5. Opetuskokeilu ja tuntien aiheet 25
   - 5.1 Opetuskokeilun lähtökohdat 25
   - 5.2 Ympyrä 27
   - 5.3 Ympyrän tangentti 32
   - 5.4 Kehäkulma 35
   - 5.5 Suorakulmainen särmiö 38
   - 5.6 Avaruusgeometria 46
   - 5.7 Projekti X 58

6. Tulosten analysointi 61
   - 6.1 Opiskelijoiden kokemus opetuksesta sirkuksen avulla 61
   - 6.2 Opetusharjoittelijan kokemus opetuksesta sirkuksen avulla 67
   - 6.3 Seuraajien kokemus opetuksesta sirkuksen avulla 68
   - 6.4 Vertailu vuotta aikaisempaan ryhmään 69

7. Luotettavuustarkastelu 74

8. Pohdinta 77

9. Yhteenveto 82

Lähteet 85

Liite A. 89

Liite B. 90

Liite C. 91

Liite D. 93

MERKINNÄT

$\leq$	Epäyhtälö, pienempi tai yhtä pieni kuin
$\geq$	Epäyhtälö, suurempi tai yhtä suuri kuin
$\neq$	Erisuuruus
$\lvert z\rvert$	Itseisarvo luvusta z
$\in$	Joukkoon kuuluvuus relaatio
$m \perp l$	Kohtisuorat suorat m ja l
$\triangle$	Kolmio
$\angle$	Kulma
$\subset$	Osajoukko
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\cup$	Unioni
$\sim$	Yhdenmuotoisuusrelaatio
$m \parallel l$	Yhdensuuntaiset suorat m ja l
$\cong$	Yhtenevyysrelaatio
$=$	Yhtäsuuruus
$C(O, r)$	Ympyrä, jonka säde on r ja keskipiste O

1. JOHDANTO

Sirkusta matematiikan opetuksessa on tutkittu vähän. Tutkimuksen tavoitteena on kokeilla, kuinka sirkus sopii matematiikan opetukseen ja millaisia kokemuksia se antaa opiskelijoille ja opettajalle. Aikaisemmissa tutkimuksissa on todettu draaman käytön opetuksessa lisäävän opiskelijoiden motivaatiota [28]. Koska sirkuksen voidaan ajatella olevan yhdistelmä draamaa ja liikuntaa, voisi myös sen kuvitella lisäävän opiskelijoiden motivaatiota. Moni kokonaisuus on kuitenkin suurempaa kuin sen osien summa, ja näin on myös sirkuksen osalta. Ei voida suoraan osoittaa, että liikunnan tai draaman tuomat hyödyt opetuksessa olisivat samat sirkuksen tuomien hyötyjen kanssa, mutta yhteneviltä osin näistä tehtyjä tutkimuksia käytetään tämässä diplomityössä.

Matematiikan osaaminen vaatii monenlaista osaamista matematiikan termistön tuntemisesta loogiseen päättelyyn ja oivaltamiseen. Matemaattisten proseduurien ymmärtämistä tarvitaan laskuista suoriutumiseen, mutta matematiikan kokonaisvaltainen osaaminen vaatii opiskelijan tietojen verkottumista kokonaisuuksiksi, jotka mahdollistavat loogisen päättelyn, yleistämisen sekä oivaltamisen. Matematiikan oppiminen vaatii siis muutakin kuin kaavojen käytön opettelua – opetuksen tulisi ohjata opiskelijaa ajattelemaan laajempia kokonaisuuksia ja yhdistämään oppimansa asiat tähän tietoverkkoon. Myös taiteissa oppiminen perustuu oivallukseen. Oppimista tapahtuu, kun opiskelijan maailmankuva järkkyy ja siihen syntyy särö [21]. Opiskelija joutuu muokkaamaan maailmankuvaansa uudelleen siten, että uusi tieto sopii siihen. Matematiikassa ja taiteessa oppiminen on niin samankaltaista, että loppujen lopuksi tuntuu erikoiselta, että niitä ei kouluissa yhdistellä enemmän.

Tutkimuksen aikana voimassa olleen vuoden 2003 opetussuunnitelman pitkän matematiikan geometrian kurssitavoitteina on mainittu seuraavat asiat: Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- *harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa sekä muotoa* koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa
- harjaantuu *muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään* geometrista tietoa

käsitteleviä lauseita

- *ratkaisee geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia*, yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan Lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa.

Sirkus soveltuu työkaluksi näiden tavoitteiden saavuttamiseksi etenkin tekstin kursivoiduilta osilta. Sirkusta käytetään opetuksessa pääosin havainnollistavana menetelmänä, mutta sitä käytetään myös apuna käytännön ongelmien selvittämisessä geometrian avulla. Käytännön ongelmat voivat olla esimerkiksi luvussa 5.5 esitetty taikalaatikon rakentaminen tai luvun 5.6 kiinalaisen tolpan pystyttäminen. Tasapainopallo luokassa auttaa hahmottamaan kolmiulotteisuuteen liittyviä tehtäviä ja palloon liittyviä käsitteitä ja kaavoja, joista suuri osa on lukiotasolla heikosti perusteltu. Sirkuksen käyttö opetuksessa on perusteltua myös matematiikan oppimiseen läheisesti yhteydessä olevien asennetekijöiden perusteella. Asenteet ovat osittain koulun aikaansaamia tuloksia, ja niihin voidaan vaikuttaa pedagogisilla ratkaisuilla. Kun opiskelijat kokevat opiskelun mielekkäänä ja merkityksellisenä, he saavat tuloksia. Tässä tutkimuksessa oli tavoitteena sirkusta opetusmenetelmänä käyttäen lisätä matematiikan tuntien pelillisyyttä, konkretisointia, tutkivaa oppimista sekä opitun liittämistä kouluympäristön ulkopuolelle.

Tutkimuskokeilu on suoritettu Tampereen yliopiston normaalikoulun pitkän matematiikan geometria-kurssilla 2016. Geometria-kurssia opetettiin sirkuksen keinoin kahdeksan oppitunnin ajan, jonka jälkeen analysoitiin opiskelijoiden tuloksia ja kokemuksia opetuksesta. Tutkimuksen pääasiallisina lähteinä ovat opiskelijoiden, tutkijan sekä sivusta seuranneiden opetusharjoittelijoiden kokemukset sirkuksesta opetuskeinona, sekä opiskelijoiden suoriutuminen kurssikokeesta edellisen vuoden ryhmään verrattuna. Tutkimuksessa käytettiin myös kyselylomakkeita, joiden tarkoituksena oli saada tietoa opiskelijoilta sirkuksen tuomasta lisäarvosta heidän opiskeluunsa. Tutkimuksessa on tarkoitus selvittää, soveltuuko sirkus geometrian opetukseen lukiossa, miten opiskelijat sen kokevat, minkälaista lisäarvoa sirkus tuo matematiikan opiskeluun opiskelijoiden mielestä ja tukeeko sirkus erityisesti jonkin tietyn tapaisen matemaattisen osaamisen oppimista? Näihin tutkimuskysymyksiin pyritään löytämään vastauksia luvussa 6.

Tutkimuksen tekijä, joka on myös tunnit pitänyt opetusharjoittelija, on harrastanut sirkusta useita vuosia. Hän on opettanut sirkusta erilaisille ryhmille viimeiset kahdeksan vuotta. Hänen käsityksensä sirkuksesta tulee siis sirkuksen sisältä käsin eikä niinkään ulkopuolisen tarkkailijan näkökulmasta. Sirkus määritellään tässä tutkimuksessa monialaiseksi taiteeksi, mutta samaan aikaan monipuoliseksi liikunnaksi, johon sisältyy draaman elementtejä. Sirkukseen liittyy myös koulumaailmaan sopiva ideologia yhteistyöstä, omien vahvuuksien löytämisestä ja niiden käyttämisestä sekä muiden ihmisten erilaisuuden hyväksymisestä ja kunnioittamisesta.

2. DRAAMA JA LIIKUNTA OPPIMISEN APUNA

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan sirkuksen toimivuutta teemana pitkän matematiikan tunneilla. Sirkusta lähestytään taiteen ja liikunnan näkökulmasta, ja näin on perusteltua nojautua aiempiin tutkimustuloksiin esimerkiksi draaman ja liikunnan integroinnista matematiikkaan.

2.1 Draama ja matematiikka

Hannu Heikkinen määrittelee artikkelissaan *Pohdintaa draamakasvatuksen perusteista* [15] draamakasvatuksen käsitteen. Hänen mukaansa draamakasvatuksessa on kyse draamakasvatuksesta; ei kasvatuksesta ja draamasta erikseen. Tämän vuoksi ei ole mielekästä pohtia mitä on draama tai mitä on teatteri. Draamakasvatus on termi, joka kattaa kaiken sen draaman, jota tehdään kasvatuksellisessa kontekstissa koulussa ja sen ulkopuolella [15]. Heikkisen mukaan draamakasvatus ei ole perinteistä opetusta, vaan siinä on kyse erilaisten ja vaihtoehtoisten näkökulmien luomisesta. Draamapedagogiikka voidaan käsittää skandinaavisen kielialueen (dramapedagogik) vaikutuksena, jolloin sen voidaan ajatella tarkoittavan samaa kuin draamakasvatus. Toisaalta, draamapedagogiikka-käsitettä voidaan lähestyä anglosaksisen termin Drama-in-education kautta. Tämä termi voisi olla suomennettuna pedagoginen draama. Tällöin viitataan pääosin 1900-luvulla vallalla olleeseen draaman avulla ja sen kautta opettamiseen.

Draamakasvatus voidaan ajatella neljän oppimisalueen kautta. Ensinnäkin, draamaprosessissa on aina kyse jostakin ilmiöstä, asiasta tai ongelmasta. Toisena oppimisalueena draamakasvatuksessa on sosiaalinen ulottuvuus ja ryhmätyöskentelytaidot. Tavoite on oppia, millaista on työskennellä ja toimia yhdessä ja yhteisen päämäärän eteen. Kolmantena oppimisalueena on henkilö itse, sillä draamakasvatuksessa käsitellään aina asioita, jotka liittyvät osallistujan henkiseen kehitykseen. Neljäs oppimisalue on draama itse. [15]

Draaman aktiviteetit voivat olla luokkahuoneessa moninaiset. Draama voi olla hyvinkin strukturoitua. Opiskelijat voivat esimerkiksi esittää rooleja jonkin etukäteen suunnitellun rungon tai vaikka tieteellisen teorian pohjalta. Toisaalta, draama voi olla hyvin impulsiivista ja se voi kehittyä siinä hetkessä, kun draamaa luodaan. Opiskelijat saavat improvisoida ja päättää juuri siinä hetkessä keitä he ovat ja mitä he sanovat. Draaman luonnetta luokkahuoneessa määrittää myös opettajan osallistuminen siihen. Draamaopetus voi olla opettajajohtoista tai se voi muuttua täysin sen mukaan mitä opetusryhmä itse päättää. Joskus on tarpeen, että opettaja ohjaa tiukastikin opetusta ja draaman kulkusuuntaa. Joskus taas opiskelijat voivat keskenään kehitellä oman draamansa tieteellisen teorian ympärille ja yhdessä jälleen rakentaa tietoa ja parantaa tiedon käsitteellistä ymmärrystä. [42]

Luma-sanomien artikkelissa Helsingin yliopiston Mervi Mali sekä Sonja Meriläinen tutkivat draamaa opetusmenetelmänä kaasulakien opiskelussa kemian tunnilla [28]. He käyttivät tutkimuksessaan draamallista historiallista lähestymistapaa. Historiallinen lähestymistapa auttaa oppilaita hahmottamaan, kuinka tieto muokkautuu uuden tiedon vaikutuksesta. Opiskelijat oppivat tieteenalan historiaa samalla kun heidän motivaationsa aineen opiskeluun kasvaa. [28] Tutkimuksessa Forssan yhteislyseon opiskelijat saivat ensin tietopaketin kaasulakien historiasta ja niiden tutkimiseen käytettävistä välineistä. Tämän jälkeen opiskelijat jaettiin ryhmiin, jossa he tutustuivat vielä paremmin kaasulakien parissa työskennelleisiin henkilöihin. Tutustumisen jälkeen ryhmät suunnittelivat ja esittivät tilanteen, jossa kaksi toimittajaa haastatteli näitä historiallisia henkilöitä. [28]

Usein asian suullinen esittäminen parantaa asian ymmärrystä niin, että oppilas pystyy sen pohjalta ymmärtämään paremmin myös uutta luettavaa tekstiä. Malin sekä Meriläisen tutkimuksessa on esitelty myös tutkimuksia, jossa on todettu draaman kasvattavan opiskelijoiden motivaatiota. [28] Tässä tutkimuksessa varsinaiseen draamaan liittyviä työtapoja on yksi. Luvun 5.3 draamahuutelu on lyhyt improvisaatioharjoite, jossa opiskelijat tulevat tutuiksi ympyrään liittyvän termistön kanssa. Draamaan voidaan kuitenkin Heikkisen draamakasvatuksen määritelmän mukaan laskea opiskelijoiden tekemän projekti X:n esittäminen luokalle. Historian kautta aihetta lähestyvää draamaa tämän tutkimuskokeilun aikana kokeiltiin kerran luvun 5.4 tangentti-esimerkissä.

Taiteessa oppiminen on akkomodatiivista, eli oppiminen on laadultaan oivaltavaa. Oppimista tapahtuu, kun ihmisen maailmankuva järkkyy ja hän näkee epäkohdan tai särön ajattelussaan ja tieto alkaa jäsentyä uudella tavalla. [21] Teoksessa *Prosessidraama — polkuja opettamiseen ja oppimiseen* [6] Pamela Bowell ja Brian Heap esittelevät Jacob Bronowskin artikkelin *The imaginative mind in science*, jossa

Bronowski viittaa ajatukseen siitä, miten lapset oppivat reaalimailman taitoja luonnollisesti leikkimällä. Lasten leikit ovat yhtä aikaa sekä hauskanpitoa mielikuvitusmaailmassa että todellisen maailman kokeilua. Juuri tällainen ihmisen ainutlaatuinen kyky käyttää mielikuvitustaan mahdollistaa leikin, sellaisten olosuhteiden ja tilanteiden luomisen, jotka eivät todellisuudessa ole aisteille läsnä.

Heikkinen [21] kuvaa draaman merkityksen syntyä fiktiivisen ja todellisen maailman kaksoiskohtaamisena. Kun ihminen katsoo teatteria tai draamaa, leikkii tai tekee draamaa, hän siirtyy metaforisesti fiktiiviseen maailmaan, jossa hän toimii roolissa tai uskoo katsojana roolihahmoon. Rooli toimii ikään kuin –maailmassa niin kauan kuin fiktiiviseen tapahtumaan uskotaan. Todellinen oma minä saattaa unohtua hetkeksi, mutta se ei kuitenkaan katoa. Draamakasvatuksessa onkin kyse siirtymisestä fiktiiviseen maailmaan. Osallistujat tuovat draamaan jotain omaansa riippuen heidän kulttuuristaan, kokemuksistaan tai asenteistaan. Fiktiiviseen maailmaan siirryttäessä siitä tehdään sopimus. Sopimus voi olla suullinen, kirjallinen tai se voi olla niin selkeästi osa leikkiä, että pelkästään leikin aloittaminen on merkki sopimuksen uudistamisesta. Leikin kehykset suojelevat kaikkia leikkijöitä leikin tapahtumilta [21]. Kun leikkijä tietää, mikä on totta ja mikä ei, voidaan käsitellä hankaliakin aiheita ja tilanteita.

Prosessidraama, tai pedagoginen draama, on siis teatterin osa-alue, jossa ei tehdä esityksiä yleisölle, vaan osallistujien omaksi iloksi ja hyödyksi. Prosessidraamassa opettaja ja draaman osallistujat luovat improvisaatioon pohjautuvan näytelmän omia tarpeitaan vastaavaksi ja itselleen merkitykselliseksi. Prosessidraamassa ei opiskella vuorosanoja ja esitetä valmiiksi kirjoitettua näytelmää, vaan osallistujat kirjoittavat itse oman draamassa. Prosessidraamaan osallistujille annetaan ensisijaisesti mahdollisuus oppia draaman ja teatterin taitoja ja sosiaalisia taitoja. [29] Draamaan voidaan sisällyttää myös muita oppimisalueita, kuten geometria, historia tai vaikka koulukiusaamisen pitkälliset vaikutukset.

Oppimisalueita tai draaman *teemoja* voidaan lähestyä erilaisilla draaman työtavoilla eli *strategioilla*. Strategiat voivat olla tekemiseen tai reflektointiin liittyviä tehtäviä, jotka voivat sisältää esimerkiksi improvisaatiota, tarinankerrontaa, maalaamista, askartelemista, laskemista tai keskustelua ryhmässä. Tekemiseen pohjautuvat strategiat voivat herättää mielenkiinnon draaman teemaan, rikastuttaa draaman sisältöä tai lujittaa oppilaan sitoutumista draamatyöskentelyyn [29]. Reflektoiva työtapa taas on tärkeä osa opitun syventämistä ja vaikeiden asioiden käsittelemistä. Työtapojen tehtävä draamassa on merkityksien synnyttäminen tarinaan ja osallistujien mahdollisuus työskennellä eri tasoilla. [29] Joistakin oppilaista kaikenlainen esiintyminen ja improvisaatio ei tunnu luontevalta, ja se saattaa jopa tuntua ahdistavalta. Siksi draaman ohjaajan on tärkeää valita työtavat ryhmänsä mukaan niin, että ujoimmatkin voivat osallistua draamaan ilman pelkoa ja toisaalta rohkeimmat eivät ikävysty, vaan saavat kohdata suuriakin henkilökohtaisia haasteita.

Tutkimuksessa työtavat valittiin siten, että esimerkiksi projekti X:ssä opiskelijat saivat itse päättää roolinsa ryhmässä. Näin ollen kaikki saivat käyttää omia vahvuuksiaan, kuten esiintyminen, matematiikka, luovuus tai kirjallinen ilmaisu. Projekti X:ssä oli sallittua käyttää mitä tahansa apuvälineitä videoista runouteen. Tällä yritettiin syventää opiskelijoiden oppimista. Kuten draaman avulla, myös sirkuksen tuomisella luokkahuoneeseen pyrittiin osittain nostamaan opiskelijoiden motivaatioita matematiikan opiskeluun.

2.2 Liikunnan vaikutukset oppimiseen

Liikunnan on havaittu vaikuttavan positiivisesti muun muassa tiedollisiin toimintoihin, koulumenestykseen sekä oppimiseen. Erityisesti koulupäivän aikainen liikunta, fyysisen aktiivisuuden määrä sekä hyvä kestävyyskunto ovat tutkimuksissa olleet yhteydessä hyviin kouluarvosanoihin sekä testituloksiin oppiaineissa. Liikunnan positiiviset vaikutukset koulumenestykseen on havaittu etenkin matemaattisissa aineissa. [36] Liikunnan vaikutukset oppimiseen ja oppilaaseen voidaan jakaa sen perusteella, ovatko vaikutukset fysiologisia tai kognitiivisia. Fysiologiset vaikutukset kohdistuvat suoraan oppilaan lihaksistoon sekä aivojen fysiologisiin toimintoihin, joilla on vaikutus oppilaan lihaskuntoon sekä kestävyyskuntoon ja sitä kautta esimerkiksi oppilaan minäkäsitykseen, tarkkaavaisuuteen ja motivaatioon. Tässä luvussa tarkastellaan sekä fysiologisten vaikutusten osuutta oppimiseen että liikunnan kognitiivisten eli tiedollisten toimintojen vaikutusta oppilaan koulunkäyntiin.

Opetushallinnon Liikunta ja oppiminen - tilannekatsauksessa [36] todetaan, että liikunnan positiiviset vaikutukset koulumenestykseen näkyvät erityisesti matematiikassa. Tätä väitettä tukee ainakin Donellyn kollegoineen julkaisema kolmivuotinen tutkimus [10], jossa kouluviikkoon lisättiin 90 minuuttia reipasta liikuntaa järjestämällä oppituntien lomaan kymmenen minuuttia kestäviä liikuntatuokioita. Testitulokset matematiikassa, lukemisessa ja oikeinkirjoittamisessa olivat selvästi kontrolliryhmää paremmat kolmen vuoden aikana. Tutkimusten mukaan akateemisiin opintoihin lisätty liikunta ei ainakaan heikennä oppimistuloksia, vaikka liikkumiseen käytetty aika on otettu pois akateemisen aineen opetuksesta. [10] On mahdollista, että liikunnalla on myönteinen vaikutus muistiin, keskittymiseen ja luokkahuonekäyttäytymiseen [36]. Tämä saattaisi selittää oppilaiden parantuneet oppimistulokset kontrolliryhmään verraten. Myös Yhdysvaltain terveysministeriö julkaisi vuonna 2010 tutkimuskatsauksen, joka koski lasten koulupäivän aikaisen liikunnan vaikutuksia oppimistuloksiin. Katsauksen tekijät pitivät liikunnan ja koulumenestyksen välistä yhteyttä niin voimakkaana, että he suosittelivat liikunnan lisäämistä koulupäiviin. Yhdysvaltalaisessa tutkimuskatsauksessa on merkittävää, että samoin kuin Donellyn tutkimusryhmän tutkimuksessa, akateemisista aineista pois otettu aika ei heikentänyt oppilaiden oppimistuloksia akateemisissa aineissa silloin kun ne korvattiin liikunnalla. [36]

Myös Kantomaan ryhmän laajassa tutkimuksessa selvisi, että liikunta vaikutti myönteisesti 15 - 16 -vuotiaiden tyttöjen ja poikien itse arvioimaan koulumenestykseen. Liikunnallinen aktiivisuus, vähäiset käyttäytymisen häiriöt sekä vanhempien korkea sosioekonominen asema olivat toisistaan riippumatta yhteydessä nuorten hyvään koulumenestykseen ja opintosuunnitelmiin. Tutkijoiden mielestä on mahdollista, että monipuolisen ja oppilaiden ikä- ja kehitystasolle sopivan liikunnan avulla voidaan edistää nuorten terveyttä ja hyvinvointia sekä koulutuksellisia edellytyksiä. [18] Useiden tutkimusten mukaan (Blom [5], Chomitz [7], van Dusen [11]) hyvä fyysinen kunto ja erityisesti hyvä kestävyyskunto ovat yhteydessä hyvään koulumenestykseen. Usean tutkimuksen mukaan (Davisin ja Cooperin [9], Robertsin ryhmä [32] sekä Wittbergin ryhmä [41]) hyvällä kestävyyskunnolla oli myönteinen vaikutus matematiikan ja äidinkielen koulumenestykseen. Tutkimustulokset eivät ole kuitenkaan johdonmukaisia, sillä useassa tutkimuksessa on havaittu hyvän fyysisen kunnon olevan yhteydessä matematiikan oppimistuloksiin, mutta ei äidinkielen. Joissakin tutkimuksessa yhteyttä ei havaittu ollenkaan. [36]

Liikunnalla on suuri merkitys aivojen kehittymiselle, hyvinvoinnille sekä toiminnalle. Liike on vahvasti mukana jokapäiväisessä elämässä monella eri tasolla. Myös emootiot sisältävät liikettä eleiden, ilmeiden ja kehon jäntevyyden muodossa. Liikkuminen edellyttää mielen ja kehon yhteistyötä. Keho välittää viestejä aivoille sen ulkopuolella tapahtuvista asioista. Viestit kulkeutuvat aivoihin, ja lapsi oppii tulkitsemaan niitä ja tuntemaan oman kehonsa rajat. Tavoitteeseen pääsemiseksi lapsen täytyy oppia, miten kehoa voi käyttää, minkälaisia liikkeitä ja liikesarjoja tavoitteeseen pääseminen vaatii ja miten liikkeitä korjataan. Havainto- ja liiketoimintojen kehitys ovat toisiinsa liittyviä prosesseja, joilla on suuri vaikutus emotionaaliseen, älylliseen ja sosiaaliseen kehitykseen. [36] Aivotutkimus on antanut yhä uskottavampaa näyttöä kognitiivisen suoriutumisen ja liikunnan välisestä yhteydestä. Fyysinen toiminta lisää hermoston neurotropiinin määrää. Neurotropiini on hermoston kasvutekijä, joka vaikuttaa aivojen muovautumiseen. Sen avulla hermosolut muodostavat helpommin yhteyksiä toisiinsa, jolloin informaatioimpulssit kulkevat nopeammin [31].

Liikunta lisää myös aivojen hapenottokykyä, sillä se jouduttaa aivojen verenkiertojärjestelmän kypsymistä. On osoitettu, että aktiivisesti liikkuvan hermosolutiheys aivojen etulohkossa on suurempi kuin passiivisesti liikkuvalla. Etuotsalohkon aktiivisuus liittyy ihmisen toiminnanohjaukseen, käyttäytymisen säätelyyn sekä päätöksen tekoon. Etulohkon alueiden kypsyminen jatkuu aikuisiälle asti ja liikunta näyttää vahvistavan sen kypsymistä. Liikunnan vähäisyys taas näyttää hidastavan kypsymistä. Aktiivisella fyysisellä harjoittelulla voidaan virittää aivot vastaanottamaan ja käsittelemään tietoa. Liikunta sinällään ei silti aiheuta oppimista, vaan lasta on ohjattava käyttämään aivojaan oppimiseen. [36]

Tässä tutkimuksessa lähes jokaiselle oppitunnille lisättiin liikuntaa. Liikunta tuli osaksi oppituntia jopa opiskelijoiden huomaamatta, kun he esimerkiksi mallinsivat matemaattisesti kärrynpyörää. Kärrynpyörän mallintamisessa muutamama opiskelija teki kärrynpyöriä ja muut analysoivat niitä. Liikunnan lisäämisellä kasvavan nuoren arkeen on selvästi useita hyviä puolia, mutta niihin ei tässä tutkimuksessa sen syvällisemmin paneuduttu.

3. PITKÄN MATEMATIIKAN OPISKELU LUKIOSSA

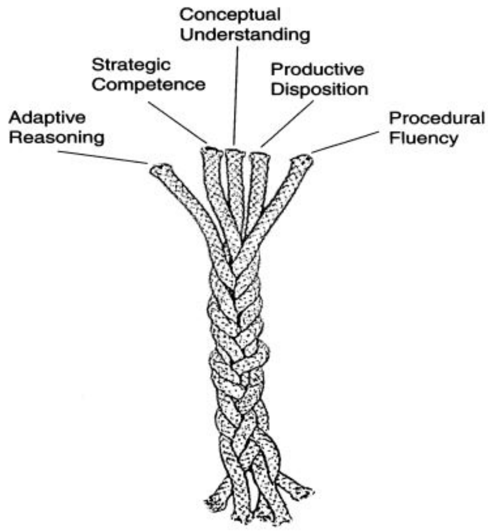
3.1 Matemaattinen osaaminen

Matemaattinen osaaminen on matematiikan monipuolista hallintaa. Matematiikan osaamisen voidaan ajatella koostuvan viidestä eri osasta [16]

- Käsitteellinen ymmärtäminen
- Proseduraalinen sujuvuus
- Strateginen kompetenssi
- Mukautuva päättely
- Yritteliäisyys

Nämä viisi osaa tai säiettä eivät ole erillisiä osasia, vaan ne on kudottu yhteen ja muodostavat monimutkaisen kokonaisuuden, josta yhtä säiettä ei voida erottaa (Kuva 3.1). Niistä rakentuu kehys, jonka avulla voidaan keskustella tiedosta, taidoista, kyvyistä ja uskomuksista, jotka muodostavat matemaattisen osaamisen. [19]

Käsitteellinen ymmärtäminen (*Conceptual understanding*) on matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja riippuvuuksien ymmärtämistä. Se viittaa yhtenäiseen ja toiminnalliseen käsitykseen matematiikasta. Opiskelija ymmärtää, miksi jokin matemaattinen käsite on tärkeä ja millaisissa asiayhteyksissä sitä voidaan hyödyntää. Hän osaa järjestää tietonsa kokonaisuudeksi ja linkittää sitä aiemmin oppimiinsa tietoihin. Koska opitut asiat ovat toisiinsa yhteydessä, opiskelijan on helpompi muistaa ja käyttää tietojaan. Opiskelija tarkastelee muistamiaan asioita ja pohtii miten ne sopivat kokonaisuuteen (vertaa *akkomodatiivinen oppiminen* taiteessa 2.1). Jos opiskelija ymmärtää menetelmän, väärinymmärtäminen on epätodennäköistä. Jos opiskelija esimerkiksi laskee kertolaskun $9,83 \cdot 7,65$ ja saa tulokseksi $7519,95$,



Kuva 3.1 *Matemaattinen osaaminen [19]*

hän huomaa, että tulos ei voi olla oikea. Hän tietää että $10 \cdot 8$ on 80, joten tätä pienemmistä luvuista ei voi tulla suurempaa tulosta. Käsitteellisesti ymmärtävän opiskelijan tieto on paketoitu tiiviisiin paketteihin, jotka sisältävät toisiinsa liittyviä tosiasioita ja periaatteita. Yhden paketin sisältämä tieto voidaan tiivistää lyhyeen lauseeseen, kuten "kertolaskujen ominaisuudet", joka on käyttökelpoinen monessa tilanteessa. Käsitteellisesti ymmärtänyt opiskelija ei välttämättä kuitenkaan osaa pukea ymmärrystään sanoiksi, vaikka ymmärtäisikin asian. [19]

Käsitteellinen ymmärrys vastaa *konseptuaalista tietoa* ja siihen liittyviä prosesseja. Konseptuaalisesta tiedosta käytetään myös nimitystä *käsitteellinen tieto*. Käsite muodostuu matematiikassa käsitelajeista, joita ovat objekti-, operaatio- ja riippuvuuskäsitteet. Sama käsite voi olla kuitenkin kaikkia näitä kolmea lajia, esimerkkinä murtoluku. Ymmärtämisestä voidaan puhua siinä vaiheessa, kun tiedon yhteyksien määrä muihin tietoihin kasvaa ja tiedosta tulee konseptuaalista tietoa. Konseptuaalinen tieto on opittava niin sanotusti mielekkäällä tavalla eikä ulkoa opetellusti. Näin opiskellut proseduurit ovat käyttökelpoisempia esimerkiksi ongelmanratkaisussa kuin ulkoa opetellut. Jos opiskelija osaa proseduurit ja käsitteet, mutta ei ymmärrä niiden välistä yhteyttä, saattaa opiskelijalla olla tunne siitä, että hän hallitsee matematiikkaa, mutta ei kuitenkaan selviydy esimerkiksi ongelmanratkaisutehtävistä. Hän saattaa myös tuottaa ratkaisuja ymmärtämättä mitä tekee. Koulussa konseptuaalisen tiedon omaksuminen on opiskelijalle usein vaikeaa. Tähän saattaa olla syynä se, että opiskelijat kokevat käsitteet irrallisina ja abstrakteina. Myös käsitteiden väliset suhteet jäävät vähälle pohdinnalle, joten yhteydet ja yhtenäinen tietoverkko jää syntymättä käsitteiden välille. [16]

Proseduraalinen sujuvuus (*procedural fluency*) viittaa proseduurien tuntemiseen, niiden käyttämiseen oikeissa tilanteissa ja oikealla tavalla joustavasti, tarkasti ja tehokkaasti. Proseduraalista sujuvuutta tarvitaan erityisesti käsitteellisen ymmärtämisen tueksi esimerkiksi rationaalilukujen ymmärtämisessä. Opiskelijan tulee osata peruslaskutoimitukset, kuten kerto-, summa- ja vähennyslaskut tarkasti ja tehokkaasti katsomatta jatkuvasti vastauksia taulukosta. Hyvä käsitteellinen ymmärtäminen esimerkiksi 10-kantajärjestelmässä tukee laskemisen sujuvuutta useampinumeroisten lukujen tapauksessa. Tämän kaltainen ymmärtäminen tukee myös yksinkertaista mutta tarkkaa päässälaskua ja joustavampia tapoja numeroiden käsittelemiseksi. On tärkeää, että laskennalliset proseduurit ovat nopeita, tarkoituksenmukaisia ja ne johtavat oikeaan vastaukseen. Tarkkuutta ja tehokkuutta voidaan parantaa harjoittelulla, mikä auttaa opiskelijaa myös pitämään yllä sujuvuutta. Opiskelijan pitää myös kyetä soveltamaan proseduureja joustavasti, sillä tosielämässä kaikki laskemista vaativat tilanteet eivät ole samanlaisia, eikä aina tarvita edes tarkkaa tulosta. Esimerkiksi tarjoilijalle maksettu tippi voidaan arvioida aiempaa ymmärrystä prosenttilaskuista apuna käyttäen, mutta esimerkiksi veroilmoitusta täyttäessä voi olla viisasta käyttää laskukonetta. [19]

Proseduraalinen sujuvuus vastaa *proseduraalista tietoa* ja siihen liittyviä prosesseja. Proseduraalinen tieto voidaan jakaa kahteen osaan: matematiikan formaalin kielen symbolisiin esittämisjärjestelmiin sekä algoritmeihin, proseduureihin ja sääntöihin matemaattisien ongelmien ratkaisemiseksi. Proseduraalisen tiedon erottaa selkeästi sen niin sanottu jonoluonne, jossa algoritmin tapaan jokainen päättelyn välivaihe seuraa edellisestä selkeästi perusteltuna. Tyypillisessä koulutehtävässä ratkaisun muodostaa proseduurien jono tehtävän ja sen ratkaisun välissä. Opittu matemaattinen tieto sisältää aina yhteyksiä konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon väliltä. Opetuksen pitäisikin tukea näiden kahden tiedon lajin linkittymistä. Jos käsitteet ja proseduurit eivät ole linkittyneet toisiinsa, opiskelija saattaa löytää tehtävään sopivan proseduurin ymmärtämättä sen tarkoitusta. Proseduurien käyttäminen on sitä tehokkaampaa, mitä parempi yhteys niillä on konseptuaaliseen tietoon, sillä konseptuaalinen tieto avaa haastavan tehtävän ymmärrettävämpään muotoon. [16]

Strateginen kompetenssi (*strategic competence*) viittaa kykyyn muodostaa matemaattisia ongelmia sekä esittää ja ratkaista niitä. Se on rinnastettavissa termiin ongelmanratkaisukyky, jota on tutkittu runsaasti. Koulussa opiskelijat usein kohtaavat ongelmia, joihin heille on opetettu tietty ratkaisutapa. Koulun ulkopuolella he kuitenkin törmäävät tilanteisiin, joiden vaikeus piileekin ongelman ymmärtämisessä ennen sen ratkaisemista. Heidän täytyy siis muodostaa ongelmasta matemaattinen niin että he osaavat ratkaista sen. Tämä vaatii opiskelijalta, että hän osaa rakentaa mielessään kuvan ongelmasta, tunnistaa sen avainelementit, ymmärtää lähtötilanteen ja kykenee esittämään ongelman matemaattisesti niin, että esitys sisältää kaikki keskeisimmät matemaattiset elementit eikä huomioi ongelman kannalta merkityksettömiä seikkoja. [19]

Strateginen kompetenssi vastaa *strategiatietoja* ja niiden käyttöä. Strategiatiedoilla tarkoitetaan tässä tietoa, jota ei voida sanoa suoraan konseptuaaliseksi tai proseduraaliseksi tiedoksi. Tällaista on esimerkiksi ongelmanratkaisussa käytettävät strategiat. Strategiat eivät koostu ainoastaan matemaattisista proseduureista, vaan ne ovat henkisiä operaatioita, joilla ohjataan ja kontrolloidaan kognitiivisia prosesseja monimutkaisissa tilanteissa. Matemaattisissa strategioissa käytetään matemaattisia termejä, lauseita ja algoritmeja. Strategioista ja niitä säätelevistä metakognitioista käytetään nimitystä *heuristiset prosessit*. Ongelman ymmärtäminen on välttämätön alku ongelman ratkaisemiselle. Uusien ongelmien ratkaisemiseksi opiskelijoiden on tärkeä tuntea erilaisia strategioita ja esimerkkejä niiden käytöstä. 1990-luvulla lukion pitkän matematiikan opetuksesta puuttui systemaattinen ongelmanratkaisustrategioiden opettaminen. [16]

Mukautuva päättely (*adaptive reasoning*) viittaa kykyyn ajatella loogisesti tilanteiden ja käsitteiden välistä suhdetta. Tällainen päättely saa alkunsa huolellisesta vaihtoehtojen pohtimisesta ja se sisältää ymmärryksen siitä, miten johtopäätökset tulisi perustella. Matematiikassa mukautuva päättely on liima, joka pitää kokonaisuuden koossa, ja johtotähti, joka ohjaa oppimista. [19] Opiskelija kykenee mukautuvaan päättelyyn, jos hänellä on riittävä tietopohja, hän ymmärtää tehtävän ja se motivoi häntä sekä jos tehtävän konteksti on opiskelijalle miellyttävä ja tuttu. Mukautuva päättely ilmenee siinä, että opiskelija osaa perustella valintansa ja tekemisensä. Matematiikassa todistaminen on eräs tapa perustella toimintaansa. [16]

Yritteliäisyys (*productive disposition*) on opiskelijan taipumusta ymmärtää, että matematiikka on järkevää, käyttökelpoista ja sen opiskelu vaivannäön arvoista. Opiskelija ymmärtää, että hän hyötyy matematiikan opiskelusta ja kokee itsensä tehokkaana oppijana ja matematiikan tekijänä. Kehittääkseen käsitteellistä ymmärrystään, proseduraalista sujuvuuttaan, strategista kompetenssiaan ja mukautuvaa päättelykykyään opiskelijan täytyy uskoa, että matematiikka on ymmärrettävää ja että kun hän näkee vaivaa oppimisen eteen, matematiikkaa voi oppia ja käyttää. [19] Esimerkiksi tehtävät, jotka eivät ole rutiininomaisia, kehittävät opiskelijan strategista kompetenssia, jolloin opiskelijan käsitykset itsestään matematiikan osaajana muuttuvat positiivisemmiksi. Tämä puolestaan edistää muuta matematiikan oppimista. Opiskelijan yritteliäisyys kuuluu affektiiviselle alueelle, jonka keskeisiä käsitteitä ovat uskomukset itsestään oppijana ja asenteet matematiikkaa kohtaan. Nämä vaikuttavat metakognitioiden kautta opiskelijan suorituksiin. Matematiikkakuva koostuu opiskelijan uskomuksista: matematiikasta, itsestä sen oppijana sekä käyttäjänä, matematiikan opetuksesta sekä sen oppimisesta. [16]

Sirkus pyrittiin oppitunneilla esittelemään niin, että opiskelija huomaisi matematiikkaa käytettävän myös sellaisissa asiayhteyksissä, mitä aikaisemmin ei ole tullut ajatelleeksi. Sirkuksen tunneille tuoman konkretian voisi kuvitella auttavan opiskelijaa yhdistelemään tietoja kokonaisuuksiksi ja ainakin tältä osin helpottaa konseptuaalista ymmärtämistä. Tutkimuksen yksi tutkimuskysymys on, kehittääkö sirkus jotakin matematiikan osaamisaluetta erityisesti.

3.2 Matematiikkakuva

Opiskelijan matematiikkakuva koostuu erilaisista uskomuksista. Näitä uskomuksia ovat uskomukset matematiikan luonteesta, itsestä matematiikan oppijana ja sen käyttäjänä ja matematiikan opetuksesta sekä sen oppimisesta. Opiskelijan matematiikkakuva vaikuttaa merkittävästi hänen matemaattiseen ajatteluunsa. Matematiikkakuva ohjaa osaltaan opiskelijan metakognitioita ja näin vaikuttavat edelleen opiskelijan ongelmanratkaisuprosesseihin, joissa metakognitiot ohjaavat opiskelijan strategiatietojen käyttöä. [16] Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisussa vuonna 2015 Pekka Kupari ja Kari Nissanen pohtivat PISA-tutkimuksissa opiskelijoiden heikkenevien tuloksien syitä artikkelissaan *Matematiikan osaamisen taustatekijät.* [40] Tässä artikkelissa Kupari ja Nissanen ovat selvittäneet PISA 2012 -aineiston avulla sitä, millaiset taustatekijät selittävät suomalaisoppilaiden ja suomalaiskoulujen matematiikan osaamista. Artikkelissa päädytään siihen tulokseen, että vahvimmin oppilaan suoriutumiseen matematiikassa vaikuttavat oppilaiden asennetekijät, joita ovat muun muassa matematiikan minäkäsitys, suoritusluottamus, sisäinen ja ulkoinen motivaatio sekä matematiikka-ahdistuneisuus (math anxiety). Tässä luvussa esitellään negatiivisesti tai positiivisesti opiskelijan matematiikkakuvaan vaikuttavia taustatekijöitä.

Negatiiviset matematiikkakokemukset saattavat saada aikaan matematiikasta vieraantumista, sen välttelyä ja matematiikan oppimisen ja sen opetuksen kyseenalaistamista. Sinikka Huhtalan ja Anu Laineen artikkelissa *"Matikka ei ole mun juttu" – Matematiikkavaikeuksien syntyminen ja niihin vaikuttaminen* [2] perehdytään matematiikan opiskelun ongelmiin ja niiden syihin. Artikkelissa käydään läpi eri alojen opiskelijoiden kokemuksia matematiikasta. Matematiikkakokemuksilla tarkoitetaan artikkelissa kokemuksia matematiikasta ja itsestä sen oppijana. Osa haastatelluista opiskelijoista muistaa tapahtumia vuosien takaa, jo ala-asteelta. Negatiivisia matematiikkakokemuksia perusteltiin muun muassa matematiikan merkitsemättömyydellä. Opiskelijoiden mielestä matematiikan opiskelu oli heille merkityksetöntä, eivätkä he tarvinneet sitä käytännön elämässä. Matematiikka tuntui myös vaikealta. Artikkelissa mainitussa Brushin tutkimuksessa (1981) opiskelijat perustelivat negatiivisia tunteitaan matematiikkaa kohtaan muun muassa sillä, että se muuttuu koulussa hyvin abstraktiksi hyvin varhaisessa vaiheessa. Opiskelijat opiskelevat valmista tietoa ja omia ajatuksia hyödynnetään vähän. Aritmetiikan jälkeen opetettavalla matematiikalla tuntuu olevan hyvin vähän käyttöä koulun ulkopuolisessa elämässä. Muissakin tutkimuksissa on käynyt ilmi, että matematiikassa epäonnistumisen syiksi on mainittu sen merkitsemättömyys koulun ulkopuolella sekä huono opetus. Opetus ja oppilaan oppimistyyli eivät olleet kohdanneet ja opettaja ei ollut osannut esittää asiaa niin, että siitä olisi syntynyt oppilaalle eheä, kokonainen kuva. [2] *Sisäisellä motivaatiolla* tarkoitetaan sitä, missä määrin oppilas on kiinnostunut matematiikasta ja nauttii sen opiskelusta. *Ulkoisella motivaatiolla* taas tarkoitetaan oppilaan käsitystä matematiikan tärkeydestä ja hyödyllisyydestä nykyhetkessä tai tulevaisuuden kannalta. [40]

Oppilaiden matematiikka-asenteet ovat tutkimusten mukaan hyvin merkityksellisiä oppimisen selittäjiä. Opiskelijat, jotka suhtautuvat myönteisesti matematiikkaan, suoriutuvat muita paremmin matematiikassa. Matematiikan *minäkäsitys* liittyy oppilaan käsitykseen siitä, kuinka hyvin hän hallitsee matematiikan oppisisällön ja kuinka hyvin hän luottaa suoriutuvansa sen opiskelusta. Minäkäsityksellä ja suorituksilla on kehämäinen ja positiivinen vaikutus toisiinsa. Hyvä minäkäsitys auttaa opiskelijaa oppimaan ja hyvät suoritukset vahvistavat minäkäsitystä. Hyvä minäkäsitys ja oppilaan korkea sisäinen motivaatio esiintyvät oppilailla tyypillisesti yhdessä, mutta minäkäsitys vaikuttaa voimakkaammin oppilaan suoriutumiseen matematiikassa. [40]

Kuparin ja Nissisen artikkelin [40] mukaan PISA 2003-tutkimuksessa minäkäsitys oli suurin oppilaiden suorituksia selittävä yksittäinen tekijä. Matematiikan *suoritusluottamuksella* taas tarkoitetaan sitä, kuinka vahvasti oppilas uskoo suoriutuvansa matematiikan tehtävistä. Minäkäsitys ja suoritusluottamus ovat käsitteinä lähellä toisiaan, mutta eroavat siinä, että minäkäsitys on laajempi käsitys matematiikan osaamisesta kun taas suoritusluottamus kohdistuu spesifimmin matematiikan tehtäviin ja niistä suoriutumiseen. Suoritusluottamus korreloi vahvasti oppilaan matematiikan osaamiseen, heidän arvosanoihinsa sekä ongelmanratkaisukykyihinsä. [40]

Englannin kielen termiä "*math anxiety*" käytetään kuvaamaan oppilaan matematiikkaan kohdistamaa ahdistusta tai matematiikkapelkoa. Matematiikkapelko ilmenee ahdistuksen ja jännityksen tuntemuksina, kun oppilas joutuu tekemisiin numeroiden käsittelyn tai ongelmien ratkaisun kanssa. Matematiikkapelko voi estää oppilaan ajattelun ja oppimisen matematiikassa, ja matematiikkapelon voimakkuudella ja menestyksellä matematiikassa onkin negatiivinen korrelaatio. Matematiikkapelkoa voi esiintyä kaikissa niissä tilanteissa, jossa opiskelija joutuu tekemisiin numeroiden kanssa. Toisaalta pelko voi tulla esiin vain sosiaalisissa tilanteissa, joissa oppilas pelkää lähinnä muiden ihmisten huomaavan hänen huonot matematiikan taitonsa. Pelkoa voi esiintyä myös vain esimerkiksi tenttitilanteissa. [2]

Matematiikkapelkoa voi selittää moni eri syy. Syitä voivat olla negatiiviset kokemukset koulussa, opettajan välittämä pelko matematiikkaa kohtaan, itseluottamuksen puute, vanhempien asenteet ja niin edelleen. Useissa tutkimuksissa on osoitettu, että opetusmenetelmällä on suuri vaikutus matematiikkapelon syntymiseen. Huhtalan ja Laineen artikkelissa [2] on esitetty Greenwoodin (1984) mielipide siitä, että juuri perinteinen selitä-harjoittele-muista ulkoa opetusmenetelmä on matematiikkapelon pääasiallinen aiheuttaja. Jos opettaja korostaa mekaanista harjoittelua ja ulkoa muistamista, monet opiskelijat vieraantuvat matematiikasta. [2] Tutkimusten perusteella matematiikka-ahdistuksella tai -pelolla on selkeä heikentävä yhteys matematiikassa suoriutumiseen. Tämä yhteys näyttäisi olevat yhtä vahva sekä tytöillä että pojilla. [40]

Toisaalta on mahdollista, että opettajajohtoinen selkeä opetus auttaisi matematiikkaa pelkääviä opiskelijoita. Selkeät säännöt ja johdattelu tuovat turvaa epävarmoille opiskelijoille. Tästä syystä ei voida sanoa, että perinteinen opetus aiheuttaisi matematiikkapelkoa ja vaihtoehtoiset eivät, sillä erilaiset opiskelijat tarvitsevat erilaisia opiskelumenetelmiä. Matematiikkapelon syntymisessä ikävuodet 9 - 11 ovat kriittisimpiä. Alakoulussa pelko ei välttämättä vielä näy, sillä laskeminen tapahtuu pienillä luvuilla ja tehtävistä selviytyy ulkoa opetelluilla säännöillä. [2]

Kuparin ja Nissisen tutkimuksessa [40] taustatekijöistä asennetekijät selittivät vahvimmin matematiikan osaamista. Heidän mukaansa asennetekijät ovatkin erittäin keskeisiä matematiikan oppimisen kannalta. Asenteet ovat osittain koulun tuottamia tuloksia ja niihin on mahdollista vaikuttaa pedagogisilla ratkaisuilla. Oppilaille olisi tärkeää tarjota mahdollisimman paljon onnistumisen kokemuksia sekä vahvistaa oppilaiden minäkäsitystä sekä suoritusluottamusta. Opetuksessa tulisi huomioida myös erilaisten oppijoiden tarpeet monipuolistamalla opetusta. Opetuksessa voisi käyttää entistä enemmän esimerkiksi pelejä, tutkivaa oppimista, konkretisointia sekä opitun liittämistä arkielämään. Opetuksessa tulisi luoda oppilaille kannustava ja avoin ilmapiiri opiskeluun. Kun opiskelijat kokevat opiskelun mielekkäänä ja merkityksellisenä, he paneutuvat siihen ja saavat tuloksia. Opiskelun asenneilmaston lisäksi tämän tyyppisellä opetuksella voidaan lisätä oppilaiden avoimuutta ongelmanratkaisuun, sinnikkyyttä, vähentää poissaoloja sekä myöhästymisiä. [40]

Sirkusta voidaan ajatella nimenomaan pelillisyyttä, vaihtelevuutta, tutkivaa oppimista sekä konkretisointia lisäävänä opetuksen teemana. Sirkuksen ideologiaan kuuluu myös erityisen vahvasti sekä erilaisuuden kunnioittaminen, myös muiden kannustaminen ja yhdessä tekeminen. Näin ollen sirkusteeman onnistuminen opetuksessa parantaa varmasti luokkan ilmapiiriä. Sirkus opetuksen teemana tuo matematiikan pois luokkahuoneesta ja saa opiskelijat yhdistämään matematiikkaa tapahtumiin, joiden yhteydessä he eivät ole matematiikkaa aikaisemmin pohtineet.

3.3 Matematiikan arvioiminen PISA-tutkimuksissa

PISA-tutkimus (Programme for International Student Assessment) on OECD:n jäsenmaiden yhteinen tutkimusohjelma. PISA-tutkimus koostuu 15-vuotiaille nuorille muutaman vuoden välein toteutettavista tutkimuksista (2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015). PISA-tutkimuksessa tutkitaan nuorten lukutaitoa sekä matematiikan ja luonnontieteiden osaamista. Vuosina 2003 ja 2012 tutkimuksen pääpainona oli matematiikka. [30] Tarkastelun kohteena eivät ole ainoastaan opetussuunnitelman mukaiset tiedot ja taidot matematiikassa, vaan myös opiskelijan kyky hyödyntää matematiikkaa tulevaisuuden haasteissaan. Tällaisia kykyjä ovat muun muassa ajatusten erittely, perustelu sekä matemaattisten ongelmien asettelu, muotoilu ja ratkominen erilaisissa tilanteissa ja ympäristöissä. Matematiikan osaaminen ei ole rajattu ainoastaan sen käyttöön, vaan myös sen esteettiset ja ajanvietteelliset elementit sisältyvät siihen. Matematiikan osaamisen perusedellytyksiä ovatkin esimerkiksi itseluottamus, uteliaisuus, kiinnostuneisuus, merkityksellisyys sekä halu tehdä ja ymmärtää asioita. [22]

PISA-tutkimuksessa ei ole tarkoitus laatia tehtäviä, jotka arvioisivat erikseen esimerkiksi oppilaan matemaattisen ajattelun taitoja, mallintamistaitoja, matematiikan kielen osaamista tai vaikka matematiikan työvälineiden käyttöä. Todellisissa tilanteissa on käytettävä samanaikaisesti useita edellä mainituista taidoista. Mikäli tehtävät laadittaisiin testaamaan yksittäisiä taitoja, niistä tulisi helposti keinotekoisia tehtäviä ja matematiikka pilkottaisiin tarpeettoman pieniin osiin. Tämän vuoksi on hyödyllistä järjestää matemaattiset taidot kolmeksi *taitoluokaksi*. PISA1 -taitoluokkaan kuuluvat määritelmät sekä lasku- ja suoritustaidot. PISA2 -

luokkaan kuuluu asioiden yhdistäminen ja niiden yhteydet ongelmanratkaisua varten ja PISA3 -taitoluokkaan taas matemaattinen ajatteleminen, yleistäminen ja oivaltaminen. [22] PISA1-luokka vaatii luvussa 3.1 esitettyä proseduraalisen tiedon hallintaa ja PISA3-luokka konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon hallintaa. PISA2 taitoluokka vaatii erityisesti matemaattisen argumentaation, mallinnuksen, ongelman asettelun ja ratkaisun taitoja. [16] Taitoluokat järjestäytyvät hierarkkisesti siinä mielessä, että taitoluokan PISA3 tehtävät ovat yleisesti taitoluokan PISA2 tehtäviä haastavampia. Kuitenkaan luokan PISA1 tai PISA2 taidot eivät ole välttämättömiä edellytyksiä taitoluokan PISA3 hallitsemiseksi. PISA-tutkimuksessa pidetään tärkeänä, että oppilas osoittaa hallitsevansa tehtävät, jotka vaativat kaikkien kolmen taitoluokan osaamista. [22]

Ensimmäisessä taitoluokassa tehtävät ovat saman kaltaisia kuin tyypillisesti monissa standardoiduissa testeissä. Tällaisissa tehtävissä oppilaan tulee hallita faktatiedot, esitys- ja merkintätavat, yhtäläisyyksien ja vastaavuuksien tunnistaminen, matemaattisten objektien ja ominaisuuksien muistaminen, rutiininomaiset laskutoimitukset, tavanomaisten algoritmien soveltaminen sekä teknisten suoritustaitojen kehittäminen. Toisen taitoluokan tehtävät vaativat oppilailta perusteltua pohdintaa siitä, mitä strategioita ja matematiikan työkaluja he käyttävät. Tehtävät eivät ole rutiininomaisia, mutta vaativat toisaalta vähän matematisointia. Tehtävistä ei suoraan näe, mitä strategiaa ratkaisuun tulee käyttää, ja ne vaativat oppilaalta sekä mallinnus- että matemaattisen argumentaation taitoja. Viimeisen taitoluokan tehtävät vaativat oppilailta ongelmanratkaisukykyä mutta myös taitoa asettaa matemaattisia ongelmia. Oppilaiden tulee tunnistaa ja erottaa tehtävään liittyvä matematiikka ja osata käyttää sitä ongelman ratkaisemiseksi. Oppilaan täytyy myös kyetä analysoimaan, tulkitsemaan, laatimaan oma mallinsa sekä esittää ratkaisunsa perustelut, tarvittaessa todistukset ja yleistykset. [22]

Tässä tutkimuksessa opiskelijoiden kurssikokeen tehtävät jaoteltiin PISA-tehtäväryhmiin ja opiskelijoiden suoritumista kokeessa tutkittiin erikseen myös näissä taitoluokissa.

3.4 Lukion opetussuunnitelman perusteet

Tutkimus toteutettiin keväällä 2016, jolloin lukiokoulutuksen opetussuunnitelma noudatti vuonna 2003 opetushallituksen määräämiä perusteita [26]. Uusi lukiokoulutuksen opetussuunnitelma hyväksyttiin syksyllä 2015 [27] ja se otettiin käyttöön 1.8.2016. Tutkimuksen suunnitteluvaiheessa otettiin kuitenkin huomioon myös uusi opetussuunnitelma, ja tutkimus tukeutuukin osittain sen perusteisiin. Uudessa opetussuunnitelmassa on korostettu edeltäjäänsä enemmän muun muassa oppiainerajat ylittävää opetusta, yhteistyötä ja yhteisöllistä oppimista sekä kokemuksellista ja elämyksellistä oppimista.

Lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteissa (LOPS) vuonna 2003 kohdassa *arvoperusteet* säädetään, että *opetuksessa tulee ottaa huomioon, että ihminen havainnoi ja jäsentää todellisuutta kaikkien aistiensa kautta.* Kasvatustyössä tulisi korostaa myös yhteistyötä sekä kannustavaa vuorovaikutusta. Kaikkia näitä kohtia pyrittiin toteuttamaan opetuskokeilussa. 2016 voimaan astuneen opetussuunnitelman arvoperusteissa kerrotaan yhteistyön ja siihen oppimisen tärkeydestä, mutta myös osallisuuden, toimijuuden ja yhteisöllisyyden korostamisesta kaikessa lukiotoiminnassa. Myös luovuutta edistävä toiminta mainitaan arvoperusteissa.

Kummankin version oppimiskäsityksissä oppiminen seuraa oppijan aktiivisesta ja tavoitteellisesta toiminnasta, jossa oppija on vuorovaikutuksessa muiden opiskelijoiden, opettajien ja muun ympäristön kanssa. Vuoden 2016 LOPS määrittää myös, että *lukio-opinnoissa opiskelijoita ohjataan havaitsemaan käsitteiden, tiedonalojen ja osaamisen välisiä yhteyksiä sekä soveltamaan aiemmin oppimaansa muuttuvissa tilanteissa.* Opiskeluympäristöjä ja -menetelmiä koskevassa kappaleessa molemmat opetussuunnitelman versiot painottavat sitä, että opiskelijoiden tulisi löytää itselleen sopivat oppimismenetelmät ja opettamisen pitäisi tukea niiden etsimistä. Opiskelutilanteet tulisi myös suunnitella siten, että opiskelija pystyy siirtämään oppimansa myös opiskelutilanteen ulkopuolelle. Kuitenkin vain LOPS 2016 nostaa esille tässä kohdassa oppimisen monimuotoisuuden tärkeyden ja korostaa uuden tiedon sidosteisuutta aiemmin opittuun.

Uudessa opetussuunnitelmassa kehotetaan myös tutkiviin, kokeileviin ja ongelmanratkaisuun perustuviin opetusmenetelmiin tukeutumista, sillä ne *edistävät oppimaan oppimista ja kehittävät kriittistä ja luovaa ajattelua* [27]. Menetelmällisillä ratkaisuilla voidaan rakentaa kokonaisuuden hallintaa ja oppiainerajat ylittävää osaamista. Uuden opetussuunnitelman mukaan merkitykselliset oppimiskokemukset innostavat ja sitouttavat opiskelijaa opiskelemiseen. Opiskelijoille tulisikin tarjota mahdollisuus sellaiseen opiskeluun, joka kytkisi opiskelijan tiedot ja taidot heidän kokemuksiinsa ja heidän ympäristössään esiintyviin ilmiöihin. Opiskelijoille tarjotaan riittävän haastavia avoimia tehtäviä, joita heitä rohkaistaan ratkaisemaan. Opiskelijoita rohkaistaan myös esittämään kysymyksiä ja etsimään niihin vastauksia. Tavoitteena on, että opiskeluympäristöt olisivat monipuolisia, rikastuttaisivat oppimiskokemuksia ja lisäisivät opiskelijoiden opiskelumotivaatiota. Myös yhdessä oppimista tulisi tukea opetuksessa. Opiskeluympäristössä opiskelutiloja ja luontoa tulisi hyödyntää niin, että ne mahdollistaisivat luovan ajattelun sekä tutkimiseen perustuvan opiskelun. [27]

Vuonna 2003 voimaan tulleen opetussuunnitelman yleisissä tavoitteissa mainitaan laajan yleissivistyksen lisäksi muun muassa opiskelutaidot, joissa tulisi erityisesti korostaa yhteistyöhön, viestintään sekä itsensä ilmaisuun liittyviä taitoja. Muita tavoitteita olivat opiskelijan tietoisuus ihmisen tekojen vaikutuksista maailman tilaan, opiskelijan itsetunnon lujittaminen sekä persoonan vahvistaminen, opiskelijan kannustaminen taiteelliseen toimintaan sekä opiskelijan valmiudet suunnitella tulevaisuuttaan. [26] Vuoden 2016 opetussuunnitelmassa tavoitteisiin oli lisätty oppiainerajat ylittävä opetus, sekä opiskelijan kehittämät tiedonhankinta-, soveltamis- ja ongelmanratkaisutaidot. [27]

Matematiikan tavoitteiksi on kummassakin opetussuunnitelmassa asetettu, että opiskelija *oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa.* Vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaan tähän tavoitteeseen päästään pitkäjänteisen työskentelyn oppimisen seurauksena. [26] Vuoden 2016 opetussuunnitelma lisää tämän tavoitteen saavuttamisen lähtökohdaksi vielä onnistumisen kokemukset. Kumpikin opetussuunnitelma asettaa tavoitteiksi myös muun muassa taidon keskustella matematiikasta, rohkaistumisen kokeilevaan ja tutkivaan matematiikkaan, ratkaisujen keksimiseen ja niiden kriittiseen arviointiin sekä sen, että opiskelija harjaantuu käyttämään matemaattista mallia ongelman ratkaisussa. Opetuksen tulisi myös antaa käsitys matematiikan merkityksestä niin tieteessä, tekniikassa kuin arkielämässäkin. [27]

Pitkän matematiikan geometrian kurssin kohdalla opetussuunnitelmat eivät juuri eroa toisistaan. Molemmissa opetussuunnitelmissa tavoitteena on opiskelija, joka *harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa sekä muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi että kolmiulotteisissa tilanteissa, harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita, ratkaisee geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan Lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa* [26]. Vuoden 2016 opetussuunnitelman geometria-kurssin tavoitteisiin on lisätty myös kohta, jossa opiskelijan tulisi osata *käyttää teknisiä apuvälineitä kuvioiden ja kappaleiden tutkimisessa ja geometriaan liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa* [27]. Kurssin keskeiset sisällöt ovat pysyneet samoina uudessa opetussuunnitelmassa.

4. TUTKIMUKSEN SUORITTAMINEN

Tutkimus on luonteeltaan kvalitatiivinen. Sen tavoitteena on tutkia lähinnä opiskelijoiden suhtautumista sirkukseen opetustapana sekä sitä, vaikuttaako sirkus heidän motivaatioonsa tai ymmärrykseensä matematiikan moninaisuudesta. Tutkimus toteutettiin 21 opiskelijan ryhmässä. Ryhmää ei valittu etukäteen, eivätkä opiskelijat tienneet ennen kurssille ilmoittautumista, että kurssilla toteutetaan sirkukseen liittyvä tutkimus.

4.1 Tutkimusongelmat

Tutkimuksellinen tavoite on tutkia, kuinka sirkus toimii oppimisympäristönä matematiikan opetuksessa lukiossa. Varsinaiset tutkimusongelmat ovat

1. Miten sirkus soveltuu geometrian opettamiseen?
2. Miten opiskelijat kokevat opetuksen sirkuksen avulla?
3. Minkälaista lisäarvoa sirkus tuo matematiikan opiskeluun opiskelijoiden mielestä?
4. Mitä matemaattisen osaamisen aluetta sirkus opetusmenetelmänä tukee?

Ensimmäistä tutkimuskysymystä varten opiskelijoilta, tuntia seuranneilta opetusharjoittelijoilta sekä ryhmän omalta opettajalta kerätään palautteet tunneista. Tunnit pitävä opetusharjoittelija kirjoittaa tutkimusjakson aikana myös päiväkirjaa, jossa hän reflektoi omaa osuuttaan tunnista, mielipidettään opetusmenetelmästä ja muista tunnin aikana esiin nousseista seikoista. Toiseen tutkimuskysymykseen haetaan vastausta avoimilla kysymyksillä opiskelijoille järjestetyssä kyselyssä sekä analysoimalla opiskelijoiden antamaa palautetta opetusharjoittelijalle. Kysymykseen etsitään vastausta myös sivustaseuraajien antamista palautteista sekä opetusharjoittelijan kirjoittamasta päiväkirjasta. Kolmatta tutkimusongelmaa lähestytään monivalintaväittämällä ”Sirkus tuo lisäarvoa opiskeluuni” opiskelijoille järjestetyssä kyselyssä. Lisäaineistona käytetään opiskelijoiden vastauksia avoimeen kysymykseen ”Jos vastasit edelliseen kysymykseen olevasi osittain, jokseenkin tai täysin samaa mieltä siitä että sirkus tuo lisäarvoa opiskeluusi, perustele vastauksesi" sekä opiskelijoiden antamaa yleistä palautetta. Viimeistä tutkimuskysymystä lähestytään jakamalla opiskelijoiden koetehtävät PISA -tehtäväluokkiin ja tutkimalla niiden vastausprosentteja sekä suoriutumista kussakin taitoluokassa. Kurssikokeen vastauksia analysoidaan sekä tehtävien keskiarvon että vastausten määrien perusteella.

4.2 Tutkimusaineiston kerääminen ja analysointi

Aineiston kerääminen aloitettiin kirjallisuuden etsimisellä ennen opetuskokeilua. Kirjallisuutta kerättiin muun muassa aiheista liikunta sekä draama opetuksessa, sillä suoranaisesti sirkusta ja lukion matematiikan opetusta yhdistävää aiempaa tutkimusta ei ollut saatavilla. Kirjallisuutta tutkittiin myös matematiikan opiskelusta lukiossa muutaman eri näkökulman kautta. Toisaalta tutkittiin matemaattisen tiedon luonnetta ja minkälaisia kykyjä matematiikan osaaminen vaatii. Toisaalta kiinnostavaa erityisesti neljännen tutkimusongelman osalta olivat tehtävätyypit, joista kukin vaatii tietynlaista matemaattista osaamista. Kiinnostava aihealue oli myös yksilön matematiikkakuva ja siihen liittyvät asenteet ja kokemukset, jotka vaikuttavat matematiikan osaamiseen. Opiskelijan matematiikkakuvan huomioiminen opetuksessa johti neljännen tutkimuskysymyksen heräämiseen. Tutkimuksessa taustakirjallisuudeksi valittiin myös sekä vuoden 2003 että 2016 lukion valtakunnallinen opetussuunnitelma. Lukio-opetuksen tulee seurata tarkasti lukion opetussuunnitelmaa, joten on luontevaa hakea sieltä tukea tutkimukselle. Tutkimuksessa myös vertailtiin kahta opetussuunnitelmaa, sillä tutkimusjakso oli keväällä 2016, jolloin vuoden 2003 opetussuunnitelma oli vielä voimassa. Uusi opetussuunnitelma astui voimaan ennen tämän tutkimuksen julkaisua.

Varsinaisen aineiston kerääminen aloitettiin ensimmäisellä oppitunnilla, jolla opiskelijat vastasivat alkukyselyyn (LIITE 1). Vain 14 opiskelijaa oli paikalla ja vastasi alkukyselyyn. Kysely sisälsi monivalintaväittämiä sekä kaksi avointa kysymystä. Opiskelijat vastasivat viimeisellä tunnilla ennen kurssikoetta myös loppukyselyyn (LIITE 2). Tällä tunnilla oli paikalla 20 opiskelijaa, joten loppukyselyyn vastanneita oli huomattavasti enemmän kuin alkukyselyyn vastanneita. Loppukysely oli samanlainen kuin alkukysely, mutta siihen oli lisätty kaksi avointa lisäkysymystä sekä yksi monivalintaväittämä. Lisätty monivalintaväittämä oli edellä mainittu kysymys sirkuksen tuomasta lisäarvosta opiskeluun. Muiden monivalintaväittämien tarkoituksena oli selvittää opiskelijan sisäistä ja ulkoista motivaatiota opiskeluun ja minäkäsitystä. Alku- ja loppukysely suoritettiin socrative.com -sivustolla. Socrative.com -sivustolla kysymykset tulevat opiskelijan näkyviin yksitellen, eikä opiskelija pysty ennen kysymykseen vastaamista selaamaan seuraavia kysymyksiä. Opiskelija ei myöskään voi palata edelliseen kysymykseen siihen vastattuaan. Opiskelijalle annettiin noin kymmenen minuuttia aikaa vastata kumpaankin kyselyyn. Kysely ei jäänyt keneltäkään kesken ajanpuutteen vuoksi. Tutkimustulosten analysointiin käytettiin loppukyselyn avointen kysymysten vastausten osalta teemoittelua. Teemat nousivat aineistosta, eikä niitä valittu etukäteen.

Opetusharjoittelija pyrki kirjoittamaan lyhyesti ja päiväkirjamaisesti ylös huomioitaan tunnin kulusta heti jokaisen tunnin jälkeen. Hän kirjoitti reflektoiden omaa opettajuuttaan sekä pohtien havaintoja opetusmenetelmästä, luokan tunnelmasta sekä tunnin kulusta. Näistä merkinnöistä kerättiin tutkimukseen tietoa etenkin ensimmäistä tutkimuskysymystä silmällä pitäen. Opettajan pitämä päiväkirja ei ollut aineistona laaja, mutta sitä käytettiin yhdessä muiden aineistojen kanssa sirkuksen soveltuvuuden tutkimiseen matematiikan tunnilla. Opetusharjoittelija sai muutamasta tunnista kirjallista palautetta myös kahdelta muulta opetusharjoittelijalta. Myös näitä palautteita käytetään tutkimuksen aineistona. Nämä palautteet teemoiteltiin samaan tapaan kuin opiskelijoiden vastaukset avoimiin kysymyksiin loppukyselyssä. Näitä palautteita on analysoitu luvussa 6.3.

Tutkimuksen lähteinä käytettiin myös opiskelijoiden kurssikoetta sekä heidän saamiaan pistemääriä. Aineistossa oli mukana myös tehtäväkohtaiset pistemäärät. Näitä pisteitä verrattiin edellisenä vuonna samalla kurssilla järjestettyyn kurssikokeeseen ja siitä saatuihin pisteisiin. Koetehtävät jaettiin luvun 3.3 mukaisiin taitoluokkiin. Opiskelijoiden suoriutumista arvioitiin tilastollisin menetelmin, kuten ristiintaulukoimalla sekä laskemalla kahden ryhmän väliset p-arvot χ^2 -jakauman avulla. Kaikista aineistoista tätä ei voinut tehdä, sillä otokset olivat pieniä. Tuloksista vertailtiin tehtäväkohtaisia pisteitä, vastausprosentteja, variansseja ja koko kokeen sekä taitoluokkien tehtävien pisteiden keskiarvoja.

5. OPETUSKOKEILU JA TUNTIEN AIHEET

Opetuskokeilu suoritettiin Tampereen yliopiston normaalikoulun lukiossa pitkän matematiikan 3. kurssilla, eli geometrian kurssilla. Kokeilu suoritettiin kurssin viimeisellä puolikkaalla, jolloin tuntien aiheet aikajärjestyksessä olivat ympyrä, ympyrän tangentti, kehäkulma, suorakulmainen särmiö, kulma avaruudessa, pallo, lieriö ja kartio. Opiskelijat tekivät kokeilujakson aikana myös sirkusteemaisen projektin ja viimeiset kolme oppituntia käytettiin kertaamiseen sekä projektien esittelyyn. Alaluvut on nimetty kunkin tunnin keskeisen matemaattisen sisällön mukaan. Alalukujen rakenne on ensimmäistä lukuun ottamatta sellainen, että lukija pystyy kunkin aiheen kohdalla tutustumaan ensin tunnin matemaattiseen sisältöön. Tämän jälkeen kyseisen tunnin opetusmenetelmät ja tehtävät on kuvailtu jokseenkin yksityiskohtaisesti, sillä lähes kaikki materiaali on opetusharjoittelijan itse tuottamaa eikä tämän vuoksi ole kenellekään tuttua. Viimeisillä tunneilla ei käsitelty uusia geometrian aihealueita, vaan opiskelijat esittivät kurssin aikana tekemänsä sirkusta ja matematiikka yhdistävän projekti X:n ja laskivat kertaustehtäviä. Tästä syystä viimeisessä alaluvussa ei ole matemaattista sisältöä.

5.1 Opetuskokeilun lähtökohdat

Oppitunnin pituus Tampereen normaalikoulussa on 75 minuuttia. Opetuskokeilu koostui kolmenlaisista tunneista: perustunneista, joilla käytiin läpi kirjan kappale sirkuksen avulla, kahden oppitunnin mittaisesta learning cafe - menetelmällä toteutetusta jaksosta, jonka aikana käytiin läpi kirjan neljä kappaletta avaruuskulmasta kartioon sekä ryhmissä tehtävästä projekti X:stä, jonka opiskelijat toteuttivat suurimmaksi osaksi kotonaan mutta esittivät oppitunnilla. Luokkaan oli tuotu sirkusvälineitä, kuten jonglöörauspalloja, hulavanteita, pedalo, tasapainopalloja sekä rolabolia. Opiskelijat saivat halutessaan käydä harjoittelemassa sirkusvälineillä myös kesken tunnin, jos laskeminen alkoi väsyttää. Kesken opettajajohtoisen opetuksen tai ryhmätöiden aikana ei kuitenkaan ollut lupaa harjoitella välineillä. Teoreettisena perusteena tälle toimintatavalle on luvussa 2.2 mainitut tutkimukset siitä, että oppiminen ei ainakaan heikkene, jos luokkaan tuodaan lisää liikuntaa, vaikka akateemisen aineen opiskeluun käytetty aika hieman vähenisikin.

Opetuskokeilun materiaalit, kotiläksyt ja opiskelijoiden projektit lisättiin iTunesU - ympäristöön [14], missä kurssi on julkinen ja opetusmateriaalit ovat täten näkyvissä kaikille. Opetusharjoittelija piti kurssin tunnit ja luokan varsinainen opettaja oli mukana tarkkailemassa. Opetusharjoittelija on tämän tutkimuksen tekijä. Opetusharjoittelijalla on vahva sirkustausta, jota hän käyttää opetuksen sirkussisällön tuottamiseen. Hän on osallistunut myös koko kurssin kurssisuunnitelman tekemiseen.

Matemaattista osuutta silmällä pitäen määritellään muutama tunneilla käytetty termi. Osa tässä luvussa esitellystä tasogeometriasta on lainattu tutkimuksen tekijän kandidaatin työstä *Prosessidraama geometrian opetuksen apuvälineenä*, tosin hieman paranneltuna. Kuitenkaan suurinta osaa tämän diplomityön matematiikasta ei ole lainattu.

Määritelmä 5.1. *[37] Joukkojen A ja B* unioni *on kaikkien niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon A, joukkoon B tai molempiin. Unionia merkitään*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad tai \quad x \in B\} \ . \tag{5.1}$$

Unioni koostuu niistä perusjoukon alkioista, jotka kuuluvat molempien tai toisen joukon alkioihin. Olkoon perusjoukko E esimerkiksi taso, johon kuuluu joukot l ja m. Jos joukot l ja m ovat puolisuoria, joilla on yhteinen alkupiste O, niin molempien puolisuorien kaikki pisteet kuuluvat niiden muodostamaan unioniin. Tätä merkitään $l \cup m$. Jos joukkoon E kuuluvat kaikki joukon A alkiot, niin joukkoa A kutsutaan joukon E *osajoukoksi*. Tätä merkitään $A \subset E$. [37]

Tasoksi kutsutaan struktuuritonta ja epätyhjää perusjoukkoa τ. Tason alkiot ovat *pisteitä*. Tasossa on pisteistä koostuvia osajoukkoja, joita kutsutaan *suoriksi*. Myös *janat* ovat suorien järjestettyjä osajoukkoja. Ne sisältävät pisteitä, joita kutsutaan janan *sisäpisteiksi*. *Puolisuora* on suora, jolla on alkupiste O. Jos suoralla l on piste O, se jakaa suoran pisteet kahteen epätyhjään joukkoon. Merkitään puolisuoraa, jonka alkupiste on O ja joka kulkee pisteen A kautta, merkinnällä OA. Puolisuorat OA ja OB ovat vastakkaiset, jos pisteet ovat suoralla a järjestyksessä AOB. [23]

Tarkastellaan puolisuoria OA ja OC, joilla on sama alkupiste O ja jotka eivät ole saman suoran joukkoja. Tällöin niiden unionia $OA \cup OC$ kutsutaan *kulmaksi* ja merkitään $\angle AOC$ tai $\angle O$. Kulman *aukeama* on niiden tason pisteiden joukko, jotka ovat samalla puolella puolisuoraa OA kuin piste C ja samalla puolella puolisuoraa OC kuin piste A. Puolisuoria kutsutaan kulman *kyljiksi* ja alkupistettä kulman *kärjeksi*. [23] Vakiintunut tapa merkitä kulmia on myös käyttämällä kreikkalaisia kirjaimia α, β ja γ. [8] Yhteneviä janoja voidaan kutsua *yhtä pitkiksi* janoiksi. Tällöin yhtä pitkät janat AB ja CD voidaan merkitä yhtä suuriksi $AB = CD$.

Aksiooma 1. *Janojen yhtenevyysaksiooma.*

(i) *Jos janat AB ja EF ja janat CD ja EF ovat yhteneviä, niin tällöin myös janat AB ja CD ovat yhtenevät.*

(ii) *Olkoot ABC ja $A'B'C'$ janoja. Jos janat AB ja $A'B'$ ovat keskenään yhtenevät sekä janat BC ja $B'C'$ ovat yhtenevät, niin myös janat AC ja $A'C'$ yhtenevät.*

Yhtenevyysaksioomat mukailevat Matti Lehtisen, Jorma Merikosken ja Timo Tossavaisen esitystä teoksessa *Johdatus tasogeometriaan* [25].

Lause 1. *(KSK) Jos kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kulmat $\angle BAC$ ja $\angle B'A'C'$, sivut AB ja $A'B'$ ja kulmat $\angle ABC$ ja $\angle A'B'C'$ ovat pareittain yhtenevät, niin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhtenevät.*

Lauseen 1 mukaan kolmiot voidaan todeta yhteneviksi, jos kolmiolla on kaksi yhtenevää kulmaa ja yksi yhtenevä sivu toisen kolmion kanssa. Tästä käytetään lyhennettä KSK. Lauseen 2 mukaan kolmiot ovat yhteneviä, jos kolmion kaikki sivut ovat yhteneviä toisen kolmion vastaavien sivujen kanssa. Tästä käytetään lyhennettä SSS. Todistuksia näistä kahdesta Lauseesta ei tässä käydä läpi, mutta ne löytyvät Matti Lehtisen kurssimateriaalista *Geometrian perusteet* [24].

Lause 2. *(SSS) Jos kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ sivut AB ja $A'B', BC$ ja $B'C'$ sekä CA ja $C'A'$ ovat pareittain yhtenevät, niin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhtenevät.*

Luvun 5.3 Aksiooman 2 mukaan kolmiot ovat yhteneviä, jos niillä on kaksi yhtenevää sivua ja yksi yhtenevä kulma. Tästä käytetään lyhennettä SKS.

Kolmiota, jolla on kaksi yhtä pitkää sivua, kutsutaan *tasakylkiseksi kolmioksi.* Tasakylkisen kolmion $\triangle ABC$ *kanta* on sivu AB, jos kyljet AC ja BC ovat yhtenevät. *Kantakulmiksi* kutsutaan tällöin kulmia $\angle CAB$ ja $\angle CBA$.

5.2 Ympyrä

Neljä ensimäistä tuntia olivat aiheeltaan ympyrään liittyvää euklidista geometriaa. Näitä on käsitelty tässä tutkimuksessa lyhyesti jokaisen tunnin kohdalla aina tunnin aiheen mukaan. Euklidista geometriaa käsittelevät matemaattiset tekstit ovat tutkimuksen tekijän kandidaatintyöstä, mutta tekstejä on hieman korjailtu. Lähteet on pidetty kuitenkin ennallaan.

Ympyrä voidaan määritellä etäisyyden avulla reaali- eli xy-tasossa. [34] xy-taso määritellään [35]

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \ . \tag{5.2}$$

Voimme seuraavaksi määritellä ympyrän xy - tasossa $\mathbb{R}^2$.

Määritelmä 5.2. *[34] Olkoon piste P tasossa $\mathbb{R}^2$ ja r positiivinen reaaliluku. r-säteinen ja O-keskipisteinen* ympyrä *on niiden tason $\mathbb{R}^2$ pisteiden joukko, jonka etäisyys keskipisteestä O on r. Toisin sanoen*

$$C = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \ \mid PO \mid = r\} \ . \tag{5.3}$$

Ympyrän *säde* on jana OP, ja sen pituus on r. Lukiossa ympyrä määriteltiin yllä mainitulla tavalla.

Määritellään lyhyesti joitakin ympyrän ominaisuuksia. Ympyrän C pisteiden joukkoa kutsutaan ympyrän *kehäksi* tai *piiriksi*. Ympyrän *jänteeksi* kutsutaan janaa, joka alku- ja loppupiste ovat ympyrän pisteitä. Ympyrän *halkaisija* on jänne, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta. Suora l, jolla on yksi yhteinen piste T ympyrän C kanssa, on ympyrän *tangentti* pisteessä T. Tangentin ja janan OT välinen kulma on suora (kuva 5.5). Kohtisuoruutta voidaan merkitä $OT \perp l$. Janaa OT kutsutaan tällöin suoran l *normaaliksi*. Ympyrän *sisäpiste* on piste P, jos jana OP on lyhyempi kuin säde r.

Lause 3. *[34] Olkoon ympyrän C keskipiste O koordinaatiston pisteessä $O = (x, y)$. Piste $P = (x', y')$ on ympyrän C piste ainoastaan silloin, kun pisteiden P ja O etäisyys on r (kuva 5.1).*

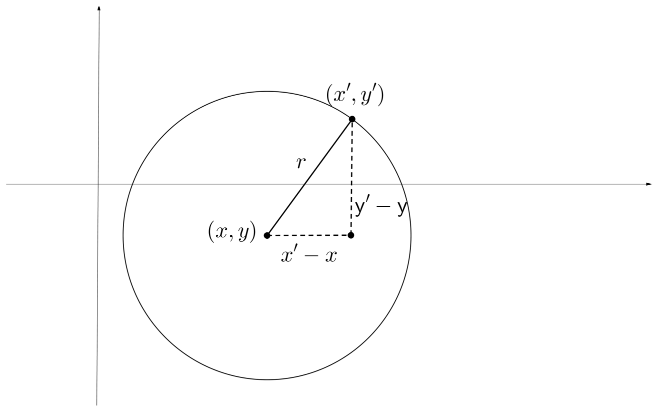
Todistus. [34] Pisteiden etäisyys saadaan Pythagoraan Lauseen mukaan. Pythagoraan Lause todistetaan tässä diplomityössä myöhemmin (Lause 12). Ympyrän säde r, eli pisteiden P ja O välinen etäisyys, voidaan nyt ilmaista muodostuneen kolmion hypotenuusan avulla. Ympyrän yhtälöksi saadaan tällöin

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2 \ . \tag{5.4}$$

Jos ympyrän keskipiste on origossa, eli pisteessä $(0,0)$, saadaan ympyrän yhtälöksi

$$x^2 + y^2 = r^2 \ . \tag{5.5}$$

□



Kuva 5.1 *Ympyrän C säde on r.*

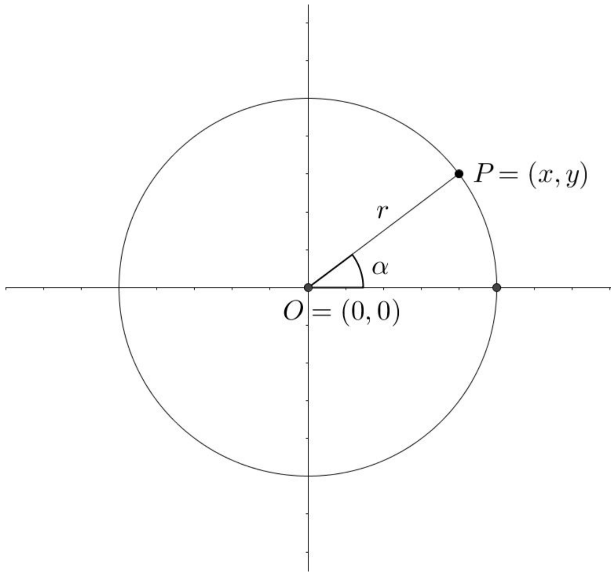
Ympyrän sini ja kosini voidaan määritellä suorakulmaisen kolmion avulla. Tällöin suorakulmaisessa kolmiossa $\triangle ABC$, jonka kateetit ovat sivut a ja b, hypotenuusa on c ja kateettia a vastaa kulma α, sini määritellään

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}. \tag{5.6}$$

Määritelmässä kohdataan kuitenkin ongelmia, jos yritetään määrittää sini esimerkiksi kun $\alpha = 130°$. Tämän vuoksi siniä ei enää voida määritellä suorakulmaisen kolmion avulla, vaan se määritellään tässä työssä yleisemmin Määritelmässä 5.3.

Mielivaltaisen kulman α trigonometriset funktiot voidaan määritellä yksikköympyrän avulla. *Yksikköympyrä* on origokeskeinen ympyrä, jonka säde on yksi. Kulman α kärki on yksikköympyrän origossa ja oikea kylki yhtyy positiiviseen x-akseliin. Jos vasen kylki on myös x-akselilla, on kulman α suuruus 0. Kulma α kasvaa, kun vasen kylki kiertyy positiiviseen kiertosuuntaan, eli vastapäivään. [20]

Määritelmä 5.3. *[20] Olkoon kulma α yksikköympyrällä. Kulman vasen kylki leikkaa ympyrän pisteessä (x, y) ja oikea kylki on positiivisella x-akselilla (kuva 5.2).*



Kuva 5.2 *Yksikköympyrä*

Sini- ja kosinifunktiot *määritellään kaikille reaalisille kulman α:n arvoille*

$$\sin \alpha = y \tag{5.7}$$

ja

$$\cos \alpha = x. \tag{5.8}$$

Tällöin sini- ja kosinifunktio saavat arvoja väliltä $[-1, 1]$.

Trigonometriset funktiot oli kurssilla opiskeltu jo aikaisemmassa vaiheessa ja ensimmäisen tunnin matemaattinen sisältö keskittyi lähinnä ympyrän ominaisuuksiin.

Keväällä 2016 voimassa olleessa opetussuunnitelmassa kurssin tavoitteissa mainittiin muun muassa se, että opiskelija *harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa sekä muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi että kolmiulotteisissa tilanteissa.* Keskeisissä sisällöissä oli mainittu sekä *ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria*, sekä *kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen.* [27] Opetussuunnitelman tavoitteisiin ja keskeisiin sisältöihin pyrittiin vastaamaan opetuksessa monin eri tavoin jo ensimmäisellä tunnilla, jonka aiheena oli ympyrä ja keskeisenä opetusmenetelmänä toiminnallinen ja havainnollistava oppiminen.

Ensimmäinen tunti alkoi opetusharjoittelijan sekä opetuskokeilun esittelyllä, jonka jälkeen opiskelijat tekivät tutkimuksen alkukyselyn (LIITE 1) socrative.com - sivustolla. Kyselyn jälkeen opetusharjoittelija kyseli opiskelijoilta ympyrän osien nimiä ja muita ympyrään liittyviä termejä. Ympyrän termistön kertauksen jälkeen opetusharjoittelija esitti kysellen esimerkkilaskun ympyrän segmentin pinta-alan laskemisesta. Esimerkin jälkeen opiskelijat saivat kierrellä kolmessa toiminnallisessa pisteessä. Aikaa pisteissä kiertelylle jäi noin puoli tuntia.

Kuva 5.3 *Hulavanteen pyöritystä kaulan ympärillä*

Toiminnallisten pisteiden tehtävänannot olivat

- Kuinka suuren tilan vaatii vanteen pyörittäminen kaulan ympärillä? Kuinka pitkä kumiletkun pätkä tarvitaan 78 cm halkaisijaltaan olevan vanteen tekemiseen? Pisteellä sijaitsevat välineet: Isot hulavanteet, mitta.
- Neljä hulavannetta (pienet manipulaatiorenkaat) on asetettu lavalle niin, että ne sivuavat toisiaan. Hulavanteiden keskipisteet muodostavat neliön. Kuinka suuri tyhjä tila jää neljän vanteen väliin? Pisteellä sijaitsevat välineet: neljä pientä manipulaatiovannetta, mittanauha
- Kärrynpyörä: Kuinka pitkä matka kuljetaan? Tee mallipiirustus ja ratkaise ensin sen avulla. Mieti, mitä mittoja sinun pitää tietää, että voit piirustuksen avulla laskea kärrynpyörällä kuljetun matkan. Tee/pyydä kaveria tai opettajaa tekemään kärrynpyörä ja mittaa matka. Vertaa mittaustulosta laskemaasi tulokseen. Arvioi virheitä ja mieti, miten saisit vieläkin tarkemman tuloksen. HUOM! Tähän ei ole oikeaa ratkaisua. On vain hyviä ja vähän parempia matemaattisia malleja. Pisteellä sijaitsevat välineet: mitta, maalarinteippiä merkiksi (muista laittaa roskiin käytön jälkeen!), liitutaulun kolmioviivain. Pyydä muuta tarvittaessa.

Tehtävien tarkoituksena oli kerrata yläkoulusta tuttuja laskukaavoja sekä tuoda konkretiaa mukaan opetukseen. Hahmottamista auttoivat kahdenkokoiset hulavanteet (kuvat 5.3 ja 5.4). Kärrynpyörätehtävässä vaadittiin jo matemaattisen mallintamisen taitoja, vaikka tehtävänannossa ei mallintamista mainitakaan. Tehtävien tavoitteena oli saada opiskelijat kiinnostumaan siitä, missä kaikkialla matematiikkaa voidaan luokkahuoneen ulkopuolella hyödyntää.

Kuva 5.4 *Neljä pientä manipulaatiorengasta*

Tunnin lopuksi opetusharjoittelija esitteli projekti X:n opiskelijoille. Ohjeistus projektista, oppitunnin työpajojen ohjeet, lisätietoa kärrynpyörän mallintamisesta ja muuta materiaalia löytyy kurssin iTunesU - ympäristöstä [14]. iTunesU -ympäristöstä löytyy myös opetusharjoittelijalle palautuneet opiskelijoiden työt. Kyseessä oli projekti, jossa opiskelijat saivat ryhmässä toteuttaa sirkusta ja matematiikkaa yhdistävän projektin. Sirkus oli tässä tapauksessa määritelty löyhästi, ja esimerkiksi musiikkia ja runoutta saattoi käyttää projektissa.

5.3 Ympyrän tangentti

Toisen tunnin aiheena oli ympyrän tangentti, joka määriteltiin lyhyesti jo edellisessä luvussa. Tangenttia on käsitelty jo yläkoulussa, joten moni asia tuli opiskelijoille kertauksena. Tällä tunnilla käytettiin apuna draamasta lainattua mieleenpalauttamistekniikkaa, jonka tavoitteena on sekä muistella termejä ympyrän termistöstä että saada opiskelijoiden ajatukset kiinnitettyä opetettavaan materiaaliin.

Tangentin todistukseen käytetään eukleideen tasogeometrian Aksioomaa, jota kutsutaan myös Yhtenevyyslauseeksi. Ennen Aksiooman käyttöä täytyy kuitenkin määritellä siinä mainittu kolmio.

Määritelmä 5.4. *Olkoot pisteet A, B ja C samassa tasossa, mutta eivät samalla suoralla. Tällöin AB, BC ja CA unioni $AB \cup BC \cup CA$ on* kolmio.

Lause 4. *Olkoon kolmion $\triangle ABC$ sivun BC pituus a ja sivun AC pituus b. Jos kolmion sivujen a ja b välinen kulma on γ, niin kolmion $\triangle ABC$ pinta-ala on*

$$\mu(\triangle ABC) = \frac{1}{2} ab \sin\gamma \ . \tag{5.9}$$

Todistus. [23] Oletetaan, että kolmion sivulla b on piste D ja jana BD on kohtisuorassa sivua b vastaan. Merkitään korkeusjanaa $BD = h$. Tällöin kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}hb$. Koska kolmio $\triangle CDB$ on suorakulmainen, saadaan kulman γ sinille kaavan (5.6) mukaan $\sin\gamma = \frac{h}{a}$. Tästä seuraa väite. □

Pinta-alaa merkitään tästä eteenpäin isolla kirjaimella. Koska myös pisteitä merkitään samalla tavalla, pinta-ala mainitaan selkeästi erikseen sekaannuksen välttämiseksi.

Tangentin määrittelemiseksi täytyy tutkia tarkemmin suoran normaalia sekä suoran ja ympyrän yhteisiä pisteitä. Yhteisiä pisteitä tutkiessa tarvitaan myös kolmioiden yhtenevyyttä, kun kahden kolmion kaksi sivua ja yksi kulma ovat yhtenevät. Kolmioiden yhtenevyydellä tarkoitetaan, että kaksi eri kolmiota ovat yhteneviä niin sivujen kuin kulmiensakin suhteen.

Aksiooma 2. *[25](Yhtenevyyslause SKS). Jos kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ sivut AB ja $A'B'$, AC ja $A'C'$ sekä kulmat $\angle A$ ja $\angle A'$ ovat pareittain yhtenevät, niin kolmiot ovat yhtenevät.*

Lauseet 5 ja 6 pohjautuvat lähteisiin [12] ja [17].

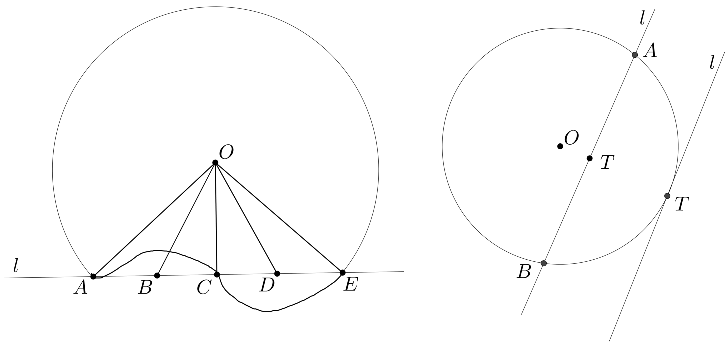
Lause 5. *Suoralla l on vain yksi pisteen T kautta kulkeva normaali.*

Lauseen todistus löytyy lähteen [17] sivulta 32.

Lause 6. *Suoralla ja ympyrällä voi olla enintään kaksi yhteistä pistettä. Jos pisteitä on yksi, niin suora on ympyrän tangentti, ja jos pisteitä on kaksi, suora määrittää ympyrän jänteen.*

Todistus. Todistetaan ensin, että suoralla ja ympyrällä voi olla enintään kaksi yhteistä pistettä:

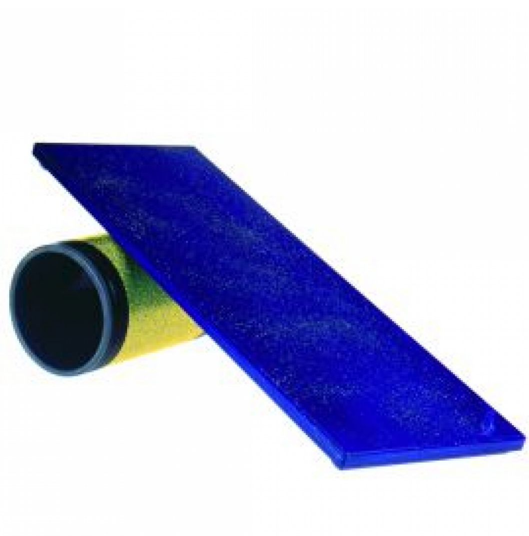
Tehdään vastaoletus, että suoralla ja ympyrällä on kolme yhteistä pistettä A, C ja E. Pisteet ovat suoralla järjestyksessä ACE. Olkoon piste B janan AC keskipiste ja piste D janan CE keskipiste (kuva 5.5). Koska janojen OA, OC ja OE pisteet A, C ja E ovat ympyrän pisteitä, kaikkien janojen pituus on r ja ne ovat yhtenevät. Myös janat AB ja BC ovat yhtenevät. Tällöin Aksiooman 2 mukaan kolmiot $\triangle AOB$ ja $\triangle BOC$ ovat yhtenevät, kuten myös kolmiot $\triangle COD$ ja $\triangle DOE$. Tällöin myös kulmat OBA ja OBC ovat yhtenevät, joten molemmat janat OB ja OD ovat kohtisuorassa suoraa l vastaan. Tulos on ristiriidassa Lauseen 5 kanssa, joten suoralla ja ympyrällä ei voi olla yhteisiä pisteitä kahta enempää. [25]



Kuva 5.5 *Ympyrällä ja suoralla voi olla enintään kaksi yhteistä pistettä.*

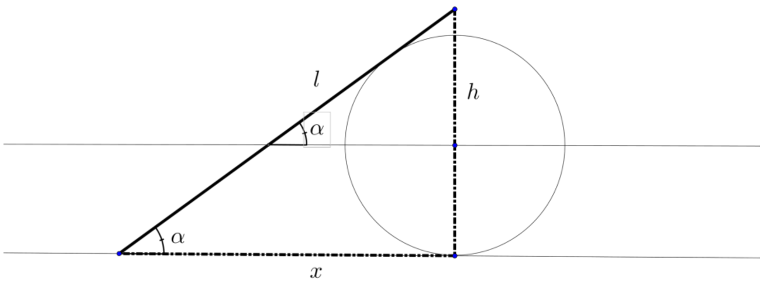
Olkoon piste T suoralla l ja olkoon se on ympyrän $C(O, r)$ keskipistettä lähin piste. Jos jana OT on lyhyempi kuin säde r, niin suora leikkaa ympyrän pisteissä A ja B, jolloin se muodostaa ympyrän jänteen. Jos jana OT on yhtä pitkä kuin säde r, niin suora leikkaa ympyrän yhdessä pisteessä ja on siten ympyrän tangentti. Jos janan OT pituus on suurempi kuin ympyrän säteen r pituus, suora ei leikkaa ympyrää missään pisteessä. [12] □

Tunnin aloittaneessa *draamahuutelussa* opiskelijat kävelivät ympäri luokkaa ja lausuivat ympyrään liittyviä sanoja. Jos opiskelija unohti sanan tai ei pystynyt keksimään sanoja valitsemassaan rytmissä, hänen tuli nostaa kädet ylös ja huutaa ”Hyvä minä!”. Tämän jälkeen opiskelija jatkoi taas luokassa kiertelyä. Muilta opiskelijoilta sanojen ”varastaminen” oli sallittua, eli jos ohi kulkeva opiskelijatoveri sanoi termin mitä opiskelija itse ei muistanut, sitä sai käyttää. Draamahuutelun jälkeen tunti jatkui ympyrään liittyvien laskujen ja kotiläksyjen tarkastamisen parissa. Tangentti käsiteltiin rolabolaesimerkin (kuva 5.6) avulla. Opetusharjoittelijan johdolla käydyssä esimerkissä rolabolan lauta havainnollisti ympyrän tangenttia. Esimerkissä



Kuva 5.6 *Rolabola. Kuva lähteestä [33]*

tuli laskea, missä kohdassa lauta osuu rullaan, kun $h = 21cm$, $l = 60cm$ ja rullan säde $r = 10cm$ (kuva 5.7).



Kuva 5.7 *Rolabola. Rolabolan laudan pituus on l.*

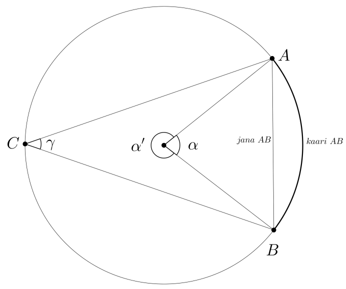
Luokan oma opettaja oli sitä mieltä, että useimmin opiskelijoilla oli ongelmia sen ymmärtämisessä, että tangentin leikkauspisteestä piirretyn säteen ja tangentin välinen kulma on suora. Tämän vuoksi opetusharjoittelija oli valinnut rolabolan avulla konkreettisen esimerkin siitä, missä kohdassa on ympyrän (rolabolan rulla) se säde, joka kulkee saman pisteen kautta kuin tangentti (rolabolan lauta).

5.4 Kehäkulma

Kolmannen tunnin aiheena oli kehäkulma. Kehäkulman teoriaosuus käytiin pikaisesti Powerpointin avulla. Kalvoissa oli sirkusaiheisia kuvia, kuten kuva kehä- ja keskuskulmasta (kuva 5.8). Kuvat liittyivät käsiteltävään teoriaan. Powerpoint diat löytyvät iTunesU:sta [14].

Kuva 5.8 *Kehäkulman suuruus on puolet samaa kaarta vastaavan keskuskulman suuruudesta. Alkuperäinen kuva: Oona Lindqvist*

Olkoot A ja B ympyrän $C(O, r)$ eri pisteitä. Kulma $\angle AOB = \alpha$ on ympyrän *keskuskulma*. Keskuskulmaa vastaava ympyrän *kaari* AB muodostuu alkupisteestä A, loppupisteestä B ja sisäpisteistä, jotka ovat kulman α aukeamassa olevat ympyrän $C(O, r)$ pisteet.



Kuva 5.9 *Ympyrän kehäkulma γ ja keskuskulma α .*

Kaksi kulmaa, joiden summa on yhteensä 90°, ovat toistensa *komplementtikulmia*. Jos kahden kulman summa on 180°, ne ovat toistensa *suplementtikulmia*. Jos kulmien summa on 360°, ovat ne toistensa *eksplementtikulmia*. [20] Kaaren AB *eksplementtikaari* on se kaari, joka vastaa eksplementtikulmaa α'. Jos piste C on eksplementtikaaren piste, niin kulma $\angle ACB$ on kaarta AB ja kulmaa α vastaava *kehäkulma* (kuva 5.9). [25]

Todistetaan ympyrän halkaisijaa vastaavan kulman suoruus. Lauseen todistus pohjautuu lähteisiin [12] ja [25]. Lausetta kutsutaan Thaleen Lauseeksi, ja se on lukion geometrian kurssin keskeinen Lause. Thaleen Lause on erikseen mainittu syksyllä 2016 voimaan tulevassa opetussuunnitelman perusteissa.

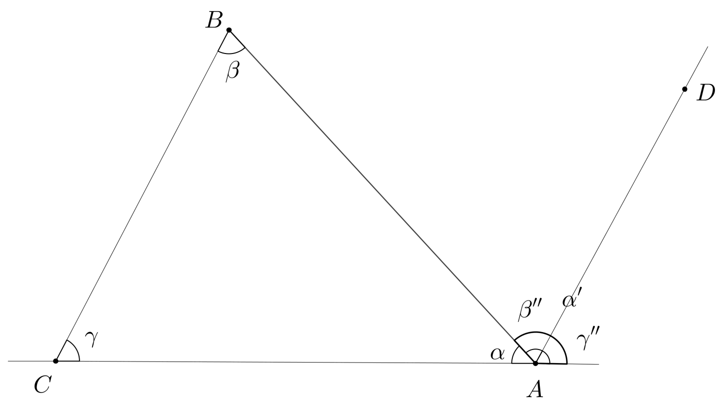
Lauseen todistamiseen tarvitaan kuitenkin vielä vieruskulmalause sekä tasakylkisen kolmion yhtenevyyslause, joiden todistukset ohitetaan. Ensimmäisenä mainitun todistus löytyy lähteestä [12] ja seuraavan lähteestä [25], joka puolestaan perustuu Eukleideen todistukseen.

Lause 7. *Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtenevät.*

Kolmioita koskevia lauseita ei käsitelty opetuskokeilun aikana, mutta kolmioiden yhtenevyys oli käyty kurssilla ennen opetuskokeilujaksoa.

Lause 8. *(Kolmion vieruskulmalause) Kolmion kulman α vieruskulma α' on yhtenevä kolmion kahden kulman summan kanssa (kuva 5.10)*

$$\alpha' \cong \beta + \gamma \tag{5.10}$$

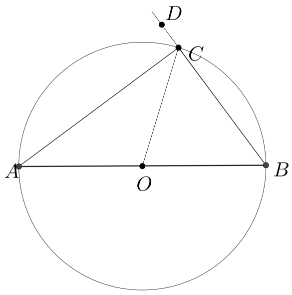


Kuva 5.10 *Vieruskulmalause*

Lause 9. *(Thaleen Lause) Oletetaan, että ympyrällä $C(O, r)$ on halkaisija AB. Jos ympyrällä on piste C, joka ei ole piste A tai B, niin kulma $\angle ACB$ on suora.*

Todistus. Oletetaan että suoralla BC on piste D niin että pisteet ovat suoralla järjestyksessä BCD. Kolmiot $\triangle AOC$ ja $\triangle BOC$ ovat tasakylkisiä (kuva 5.11), koska niiden sivut AO, BO ja OC ovat yhtä pitkiä kuin ympyrän säde. Kulma $\angle CAO$, joka on sama kuin kulma $\angle CAB$, on Lauseen 7 mukaan yhtä suuri kuin kulma $\angle OCA$.

Samaan tapaan kulma $\angle OBC$, joka on sama kuin kulma $\angle ABC$, on yhtä suuri kuin kulma $\angle BCO$. Lauseen 8 mukaan kulma $\angle ACD$ on yhtä suuri kuin kulmien $\angle CAB$ ja $\angle ABC$ summa. Nyt kulma $\angle ACB$ on siis yhtä suuri vieruskulmansa $\angle ACD$ kanssa. Koska kulmat $\angle ACD$ ja $\angle ACB$ ovat toistensa suplementtikulmia ja ne ovat yhtä suuret, niin kulma $\angle ACB$ on suorakulma. □



Kuva 5.11 *Halkaisijaa vastaava kulma on suora.*

Powerpointin dioissa oli käytetty useita kuvia ilma-akrobatiarenkaista (kuten kuva 5.8). Kuvien tarkoitus oli lisätä mielenkiintoa aihetta kohtaan sekä ohjata opiskelijoiden ajatukset kehäkulman sovelluksiin käytännön elämässä ja sirkuksessa. Osa kuvista toimi muistisääntönä.

Opetusharjoittelija esitteli sirkuksen historiaan liittyvän sirkusesimerkin, joka löytyy kokonaisuudessaan iTunesU:sta [14]. Sirkuksella on värikäs ja kohtuullisen hyvin tunnettu historia, joten sitä pyrittiin käyttämään opetuksessa poikkitieteellisesti lisäämään mielenkiintoa opiskeluun. Esimerkissä käy ilmi, miksi sirkusareenat ovat pyöreitä ja miksi niiden standardimitta on 14 jalkaa. Esimerkki oli valittu ympyrän, tai oikeammin ympyrän muotoisen lavan fysikaalisiin ominaisuuksiin perustuen, jolloin esimerkkiin voidaan liittää historian lisäksi myös fysiikkaa. Opetuskokeilun matematiikan tasogeometrinen osuus loppui tähän tuntiin, ja loppukurssi käsitteli avaruusgeometriaa.

5.5 Suorakulmainen särmiö

Neljännen tunnin aiheena oli suorakulmainen särmiö, ja sen opettelemiseksi käytettiin videomateriaalia taikatempusta, jossa käytettiin suorakulmaisen särmiön muotoista laatikkoa. Opetuskokeilun tunnin keskeisenä sisältönä oli *suorakulmaisen särmiön* hahmottaminen ja termistö sekä sen *avaruuslävistäjä*, mutta ennen niiden käsittelyä täytyy tutustua hieman tarkemmin avaruusgeometriaan. Tässä luvussa esitellään pinnallisin puolin suorakulmainen särmiö, sillä monitahokkaita käsitellään tarkemmin luvussa 5.6. Tunneilla läpikäydyt avaruuslävistäjä ja Pythagoraan Lause kolmiulotteisessa avaruudessa käsitellään tässä luvussa.

Perusjoukko on avaruus, jossa pisteet ovat joukon alkioita. Avaruudessa epätyhjät joukot voivat olla muun muassa suorat ja tasot. [23]

Aksiooma 3. *[23] Kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla, määrittävät tason.*

Lause 10. *[23] Seuraavat kohdat muodostavat yhden ja vain yhden tason:*

- *Kaksi toisensa leikkaavaa suoraa*
- *Kaksi eri suoraa, jotka ovat yhdensuuntaiset*
- *Suora ja yksi sen ulkopuolinen piste*

Todistus. [23] Todistukset perustuvat Aksioomaan 3.

- Jos suorat a ja b leikkaavat pisteessä C, piste A on suoralla a ja piste B on suoralla b sekä pisteet A, B ja C ovat eri pisteitä, niin taso ABC tulee märitellyksi kolmen pisteen avulla.
- Kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset, jos ne eivät ole sama suora ja jos ne eivät leikkaa toisiaan. Tämä yhdensuuntaisten suorien Määritelmä sisältää jo sen, että ne ovat samassa tasossa. Jos toiselta suoralta valitaan mitkä tahansa kaksi pistettä ja toiselta mikä tahansa yksi piste, niin pisteet muodostavat kaikissa tapauksissa saman tason.
- Suoran pisteet A ja B sekä suoran ulkopuolinen piste C määrittävät tason ABC.

□

Aksiooma 4. *[23] Jos suoran a pisteet A ja B ovat myös tason τ pisteitä, niin a sisältyy joukkoon τ.*

Aksioomista 3 ja 4 seuraa, että suora a ja piste $C \notin a$ määrittävät tason τ. [23]

Aksiooma 5. *[23] Jos tasot τ_1 ja τ_2 leikkaavat toisensa, niillä on enemmän kuin yksi yhteinen piste.*

Seuraavan Lauseen todistus mukailee Matti Lehtisen todistusta julkaisussaan *Geometrian perusteita* [23].

Lause 11. *Olkoot τ_1 ja τ_2 eri tasoja. Tällöin niillä on joko enemmän kuin yksi yhteinen piste tai ei yhtäkään yhteistä pistettä. Olkoon a suora, joka ei kuulu tasoon τ. Tällöin suoralla a on tason τ kanssa yksi tai ei yhtään yhteistä pistettä.*

Todistus. Olkoon A piste, joka kuuluu molempiin tasoihin τ_1 ja τ_2. Tällöin on olemassa ainakin yksi piste B, joka kuuluu tasoihin τ_1 ja τ_2 Aksiooman 5 perusteella. Tällöin suora AB kuuluu tasoon τ_1 ja τ_2 Aksiooman 4 perusteella. Jos tasoilla τ_1 ja τ_2 olisi yhteinen piste C, joka ei ole suoralla AB, niin silloin tasoilla olisi kolme yhteistä pistettä ja Aksiooman 3 mukaan tasot τ_1 ja τ_2 olisivat sama taso.

Jälkimmäinen väite seuraa Aksioomasta 4 □

Kaksi eri tasoa ovat *yhdensuuntaiset*, jos niillä ei ole yhtään samaa pistettä. Jos suora kulkee tason ulkopuolisen pisteen kautta eikä sillä ole tason kanssa yhteisiä pisteitä, on se tason suuntainen suora. [23] Kaksi tasoa leikkaavat toisensa *leikkaussuoraa* pitkin, jos niillä on yhteisiä pisteitä. Muulloin tasot ovat yhdensuuntaiset. [39]

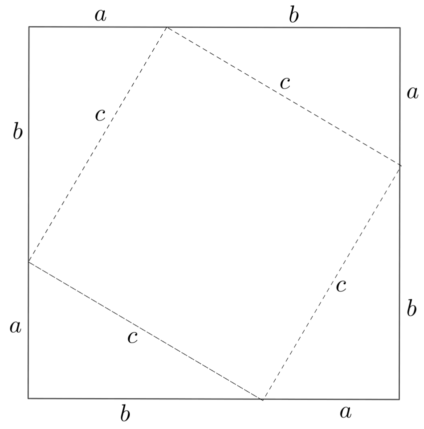
Monitahokas on ainakin kolmen tason rajaama ja näiden tasojen puoliavaruuden yhteinen osa. Tasojen leikkaussuorat ovat monitahokkaan *särmiä* ja niiden leikkauspisteet ovat monitahokkaan *kärkipisteitä*. Leikkaussuorien rajaamia alueita kutsutaan monitahokkaan *tahkoiksi*. Kaikki monitahokkaan kärkipisteitä yhdistävät janat, jotka eivät ole monitahokkaan särmiä, ovat sen *avaruuslävistäjiä*. Jos monitahokkaan kaikki sivutahkot ovat suorakulmioita, niin monitahokasta kutsutaan *suorakulmaiseksi särmiöksi*. [23]

Pythagoraan Lause on peruskoulun ja lukion geometrian opetuksen kulmakivi. Se on nimetty kreikkalaisen matemaatikon Pythagoras Samoslaisen mukaan, mutta oli tunnettu jo vuosia ennen tämän syntymää. [34]

Lause 12. *Olkoon suorakulmaisen kolmion ABC kateettien pituudet a ja b ja hypotenuusan pituus c. Tällöin*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Todistus. [34] Todistetaan Pythagoraan Lause pinta-alan avulla. On olemassa neliö, jonka sivun pituus voidaan jakaa kahteen osaan a ja b. Piirretään neliön sisälle toinen neliö, jonka sivun pituus on c kuvan 5.12 mukaisesti.



Kuva 5.12 *Pythagoraan Lauseen geometrinen todistus*

Nyt suuremman neliön jokaiseen kulmaan muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusan pituus on c ja kateettien pituudet ovat a ja b. Pienemmän neliön pinta-ala on $c \cdot c = c^2$. Suuremman neliön pinta-ala voidaan nyt lausua kahdella eri tavalla. Toisaalta, sen pinta-ala on on sen sivujen neliö

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{5.11}$$

Suuremman neliön pinta-ala voidaan laskea myös lisäämällä pienemmän neliön pinta-ala niiden neljän suorakulmaisen kolmion pinta-alaan, jotka muodostuvat suuremman neliön kulmiin. Tällöin suuremman neliön pinta-ala on

$$4(\frac{1}{2}ab) + c^2 = 2ab + c^2. \tag{5.12}$$

Kun merkitään molempien yhtälöiden (5.11) ja (5.12) oikeat puolet yhtä suuriksi toistensa kanssa, saadaan

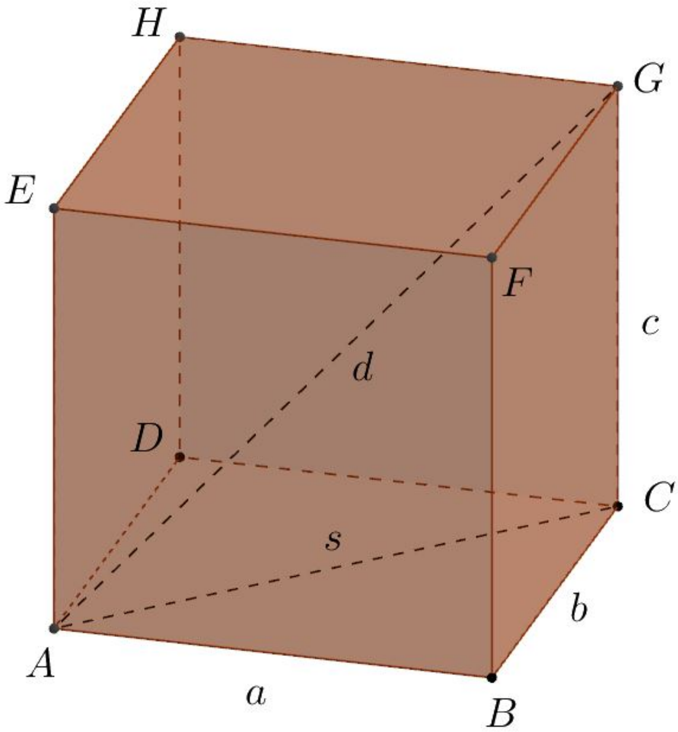
$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2 \\ \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Näin ollen suorakulmaiselle kolmiolle on voimassa $a^2 + b^2 = c^2$. $\square$

Geometrian kurssilla suorakulmaisen särmiön avulla opetettiin Pythagoraan Lauseen kolmiulotteinen versio

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 \tag{5.14}$$

Lukiossa todistettiin kaava (5.14) opiskelijoille ennestään tutun Pythagoraan Lauseen sekä suorakulmaisen särmiön avulla. Se voidaan lukiotasolla todistaa kuvan 5.13 osoittamalla tavalla. Olkoon suorakulmaisen särmiön kärkipisteet kuvan 5.13 mukaisesti A, B, C, D, E, F, G ja H.



Kuva 5.13 *Suorakulmainen särmiö*

Tahkoa $ABCD$ kutsutaan tässä suorakulmaisen särmiön pohjaksi. Jos särmien pituudet ovat a, b ja c, niin tällöin Pythagoraan Lauseen mukaan

$$a^2 + b^2 = s^2. \tag{5.15}$$

Merkitään suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjää kirjaimella d. Nyt voidaan laskea pohjan lävistäjä s käyttämällä uudelleen Pythagoraan kaavaa, sillä

$$\begin{aligned} s^2 + c^2 = &\quad d^2 \\ \Leftrightarrow s^2 = &\quad d^2 - c^2. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Yhdistämällä kaavat (5.15) ja (5.16) saadaan

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= d^2 - c^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &= d^2, \end{aligned}$$

joka on alkuperäinen kaava. Pythagoraan Lauseen (5.15) yleistetty muoto on esitetty Lauseessa 13. Tätä Lausetta ei todisteta tässä diplomityössä, mutta sen todistus löytyy sitä kaipaaville lähteen [23] sivulta 35.

Lause 13. *(Kosinilause) Olkoot kolmion $\triangle ABC$ sivujen pituudet a, b ja c sekä sivujen a ja b välinen kulma γ. Tällöin*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{5.17}$$

On luontevaa myös pohtia yleistystä Pythagoraan kaavan kolmiulotteiselle versiolle (5.14). Kolmiulotteisen version yleistyksen esittämiseen tarvitaan Lauseen 14 Heronin kaavaa sekä Lauseen 13 kosinilausetta. [13]

Merkitään kolmion sivujen pituuksia kirjaimilla a, b ja c ja käytetään merkintää p suureelle $\frac{1}{2}(a + b + c)$. Näin ollen voidaan muodostaa lauseke kolmion pinta-alalle niin, että siinä käytetään ainoastaan kolmion sivuista suoraan laskettavia suureita. Seuraavan Lauseen todistuksessa käytetään myös kolmion pinta-alan kaavaa $D = (2bc \cdot \sin\alpha)^2$, missä α on kolmion sivujen b ja c välinen kulma. [23]

Lause 14. *[23] (Heronin kaava) Olkoot kolmion $\triangle ABC$ sivujen pituudet a, b ja c ja merkitään $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Kolmion ala D saadaan kaavalla*

$$D^2 = p(p - a)(p - b)(p - c). \tag{5.18}$$

Todistus. [23] Kerrotaan lauseke $p(p-a)(p-b)(p-c)$ 16:lla, eli 2^4:llä, jolloin saadaan

$$16D^2 = 16p(p - a)(p - b)(p - c) \tag{5.19}$$

Sijoitetaan lausekkeeseen $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, jolloin saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
16D^2 &= 16\left(\frac{1}{2}(a+b+c)\right)\left(\frac{1}{2}(a+b+c)-a\right)\left(\frac{1}{2}(a+b+c)-b\right)\left(\frac{1}{2}(a+b+c)-c\right) \\
&= 8(a+b+c)(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-a)(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-b)(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-c) \\
&= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\
&= (-a^2+(b+c)^2)(a^2-(b-c)^2) \\
&= 4b^2c^2-(a^2-(b^2+c^2))^2 \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

Käytetään lausekkeessa (5.20) kosinilausetta, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
16D^2 &= 4b^2c^2-(2bc\cdot\cos\alpha)^2 \\
&= 4b^2c^2(1-\cos^2\alpha) \\
&= 16(\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha)^2. \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Kun lauseke (5.21) jaetaan puolittain 16:sta, saadaan kolmion alan toinen potenssi

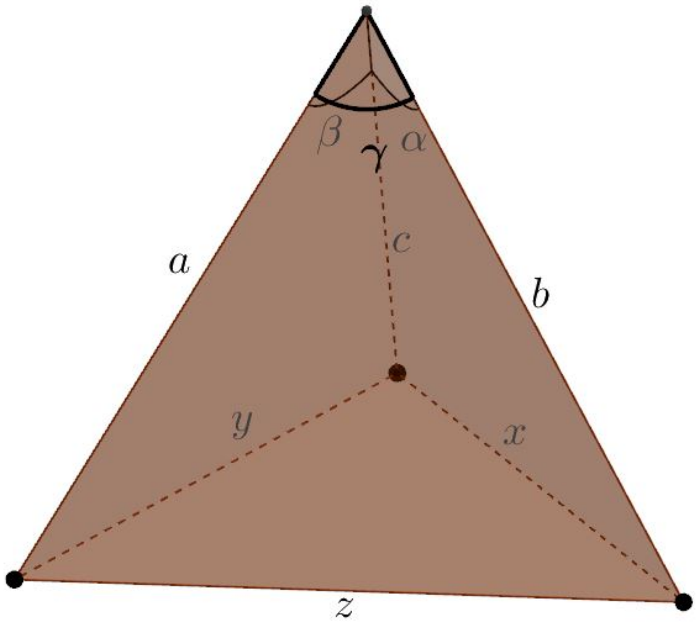
$$D^2 = (\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha)^2. \qquad (5.22)$$

□

Pythagoraan Lauseen kolmiulotteiselle versiolle (5.14) voidaan etsiä yleisempää muotoa *tetraedrin* (kuva 5.14) avulla. Tetraedri on monitahokas, jonka kaikki sivutahkot ovat kolmioita [23]. Yleisemmän muodon osoittaminen pohjautuu Juhani Fiskaalin artikkeliin *Kaksi kosinilauseen 3d-versiota* [13]. Tetraedrin *kärjeksi* kutsutaan sitä kärkipistettä, jota vastaa tetraedrin yksi tahko. Tätä tahkoa kutsutaan tetraedrin *pohjatahkoksi.* Monitahokasta, jonka jokainen sivu pohjaa lukuun ottamatta on kolmio, kutsutaan *pyramidiksi.* Jos myös pohja on kolmio, niin monitahokasta kutsutaan tetraedriksi. [23] *Säännöllisessä tetraedrissä* jokainen kulma on yhtä suuri, eli $\frac{\pi}{3}$, ja kaikki sen särmät ovat yhtä pitkiä. [38].

Olkoon tetraedrin kärjestä lähtevien särmien pituudet a, b ja c. Pohjatahkon särmän, joka jää särmien a ja b väliin, pituutta merkitään kirjaimella z. Samoin merkitään särmien a ja c välisen särmän pituutta kirjaimella y ja b ja c välisen särmän pituutta kirjaimella x (kuva 5.14). Kuvan mukaisesti särmää z vastaava kulma on kulma γ, särmää x kulma α ja särmää y kulma β. Tetraedrin pohjan pinta-alaa merkitään isolla kirjaimella D. Olkoot särmien a, b ja z rajaaman tahkon pinta-ala C, särmien

b, c ja x rajaaman tahkon pinta-ala A ja särmien a, c ja y rajaaman tahkon pinta-ala B. Tahkon pinta-ala A saadaan Lauseen 4 mukaan kaavalla $A = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$, pinta-ala $B = \frac{1}{2}ca \cdot \sin\beta$ ja pinta-ala $C = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$.



Kuva 5.14 *Tetraedri*

Lauseen 13 mukaan saadaan pohjatahkon särmien z, y ja x neliöille

$$\begin{cases} z^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \\ y^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta \\ x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Heronin kaava (5.18) voidaan lausua myös

$$D^2 = \frac{1}{16}(x^2 + y^2 + z^2)^2 - \frac{1}{8}(x^4 + y^4 + z^4). \tag{5.23}$$

Jolloin saadaan

$$\begin{aligned} D^2 =& \frac{1}{16}(b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos\beta + a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma)^2 - \\ & \frac{1}{8}((b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha)^2 + (c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos\beta)^2 + (a^2 + b^2 - \\ & 2ab \cdot \cos\gamma)^2) \end{aligned} \tag{5.24}$$

Lauseke (5.24) sievenee muotoon

$$\begin{aligned} D^2 = & A^2 + B^2 + C^2 - \frac{1}{2}abc[a(\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma) + b(\cos\beta - \cos\gamma \cdot \cos\alpha) + \\ & c(\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Jos oletetaan, että kulmat α, β ja γ ovat suoria, eli että $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, saadaan

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2, \tag{5.26}$$

sillä $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Tässä tapauksessa tetraedrin kärki olisi sama kuin suorakulmaisen särmiön yksi kulma. Näin ollen Pythagoraan Lauseen kolmiulotteinen versio pätee myös tetraedrin tahkojen pinta-aloille, kun tetraedrin kärjen kaikki kulmat ovat suoria. Säännöllisen tetraedrin tapauksessa särmät a, b, c ja s ovat keskenään yhtä suuria ja kulmat $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, joten

$$\begin{aligned} D^2 &= 3 \cdot \frac{3s^4}{16} - \frac{s^4}{2} \cdot [3 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})] \\ &= \frac{3s^4}{16} \quad . \end{aligned} \tag{5.27}$$

Yhtälö (5.27) on sama kuin säännöllisen tetraedrin sivutahkon pinta-alan yhtälö. Pythagoraan Lauseen kolmiulotteisen version eräs yleistys on siis yhtälö (5.25).

Suorakulmaista särmiötä alettiin lukiossa tutkia taikatempun avulla. Opiskelijoille näytettiin video katoamistempusta, jossa puiseen laatikkoon laitettu esine häviää. Suorakulmaisen särmiön muotoisessa laatikossa on kaksi luukkua, joista toinen aukeaa katsojaa kohti ja toinen suoraan ylöspäin. Särmiön sisään on asetettu peili niin, että laatikko näyttää katsojaan päin tyhjältä, vaikka sinne on laitettu esine ylöspäin aukeavasta luukusta. Opiskelijoiden tehtävänä oli suunnitella pareittain tai pienissä ryhmissä katoamislaatikko. Suunnittelemiseen opiskelijoiden tarvitsi laskea laatikon avaruuskulma. Opiskelijoiden tuli myös laskea, mikä pitäisi olla peilin halkaisija, jos laatikon tilavuuden haluttaisiinkin olevan pienempi. Opiskelijoille oli perusteltu yhtälö (5.14) avaruuslävistäjän yhtälönä ja se oli perusteltu kuvan 5.13 tavalla Pythagoraan Lauseen avulla.

5.6 Avaruusgeometria

Seuraavien kahden oppitunnin opetusmenetelmäksi valittiin Learning cafe -niminen menetelmä. Menetelmässä opiskelijat jaetaan ryhmiin ja jokainen ryhmä saa eri aiheen, johon he tutustuvat. Aiheet näillä tunneilla olivat kulma avaruudessa, pallo, lieriö sekä kartio. Kirjassa oli jokaisesta aiheesta oma lukunsa.

Kulmaa avaruudessa käsiteltiin opetuksessa konkretian kautta, sillä hahmottaminen oli monelle hankalaa. Aiheen teoria jää lukio-opetuksessa vähäiseksi. Opiskelijoiden suorittamat laskut ovat helppoja kulman suuruuteen liittyviä laskuja, mutta tästä huolimatta hahmottamisongelmien vuoksi aihe oli kurssin hankalimpia. Kulmalla avaruudessa tarkoitettiin joko suorien, suoran ja tason tai kahden tason määrittämiä kulmia avaruudessa.

Määritelmä 5.5. *[1] Suora a on* kohtisuorassa *tasoa τ vastaan jos se on kohtisuorassa jokaista tason τ suoraa vastaan. Kohtisuoruutta merkitään $a \perp \tau$.*

Jos suora ja taso ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, ne *leikkaavat toisensa.* Jos suora a ja taso τ ovat *yhdensuuntaisia*, taso τ sisältää suoran a kanssa yhdensuuntaisia suoria. [1]. Jos suorat a ja b ovat yhdensuuntaiset, niitä merkitään $a \parallel b$.

Lause 15. *[23] Jos suora a on yhdensuuntainen suoran b kanssa ja suora b on yhdensuuntainen suoran c kanssa, niin suora a on yhdensuuntainen suoran c kanssa.*

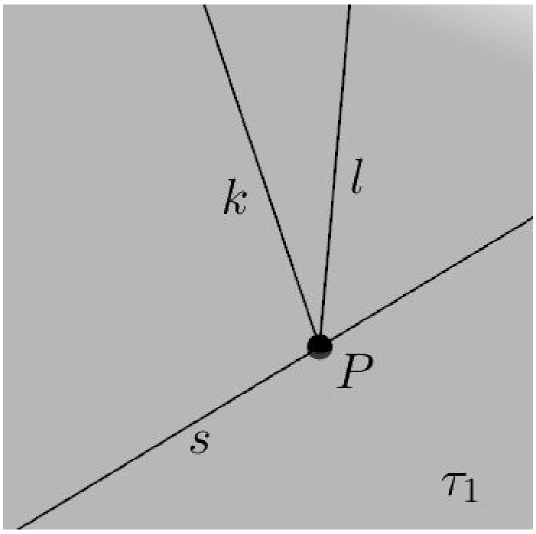
Lauseen 15 todistus ohitetaan tässä tutkimuksessa aiheen rajaamiseksi, mutta se on todistettu esimerkiksi Matti Lehtisen *Geometria*- teoksessa [23] sivulla 71.

Lause 16. *[1] Jos suorat k ja l ovat molemmat kohtisuorassa tasoa τ vastaan niin suora k on yhdensuuntainen suoran l kanssa. Jokaista tason pistettä kohti on olemassa täsmälleen yksi suora, joka on kohtisuorassa tason kanssa.*

Todistus. [1] Suorat k ja l ovat kohtisuorassa tasoa τ_1 vastaan, joten ne myös leikkaavat tason τ_1. Oletetaan, että molemmat suorat leikkaavat tason τ_1 pisteessä P (kuva 5.15) ja todistetaan että suorat k ja l ovat samat suorat.

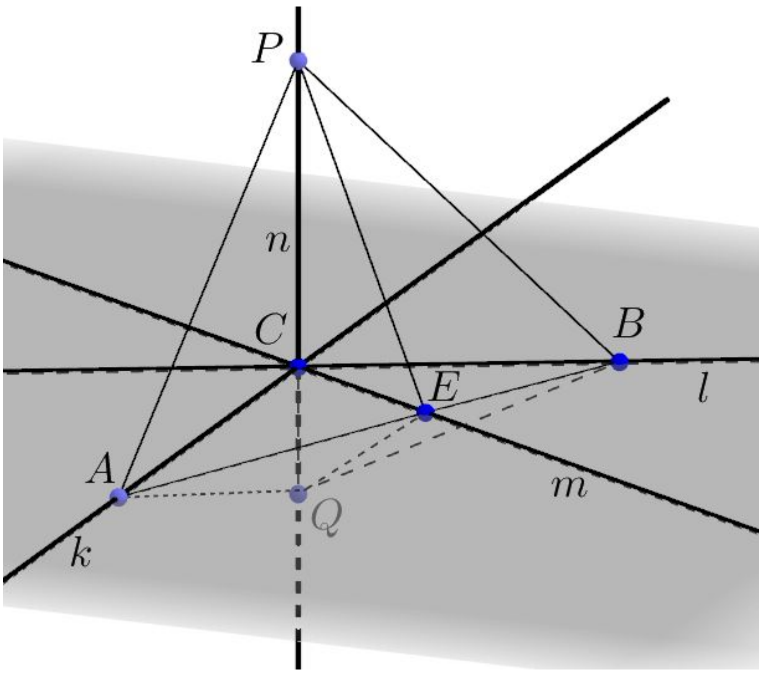
Oletetaan, että suorat k ja l ovat eri suoria. Koska molemmat suorat leikkaavat tason pisteessä P, ne sijaitsevat samalla tasolla τ_2. Tällöin piste P on sekä tasolla τ_1 että τ_2, tasot leikkaavat leikkaussuoraa s pitkin (Aksiooma 5). Koska leikkaussuora s on sekä tasolla τ_1 että τ_2, niin suorat s ja k ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, kuten myös suorat s ja l. Koska taso τ_2 sisältää ainoastaan yhden suoran, joka kulkee pisteen P kautta ja on suoraa s vastaan kohtisuora, on suorien k ja l oltava sama suora. $\square$

Lause 17. *[1] Olkoon suora n kohtisuorassa tason τ toisensa leikkaavia suoria k ja l vastaan. Tällöin suora n on kohtisuorassa jokaista tason τ suoraa vastaan ja siten kohtisuorassa tasoa vastaan.*



Kuva 5.15 *Tason kanssa kohtisuoraan olevat suorat ovat keskenään yhdensuuntaiset*

Todistus. Olkoon C suorien l ja k leikkauspiste. Oletetaan että suora n kulkee pisteen C kautta. Olkoon lisäksi suora m tasolla τ, ja oletetaan että myös se kulkee pisteen C kautta. Valitaan kuvan 5.16 osoittamalla tavalla suoralta n pisteet P ja Q, jotka ovat yhtä kaukana pisteestä C, mutta sen eri puolilla. Valitaan suorilta k ja l sellaiset pisteet A ja B, että jana AB leikkaa suoran m.



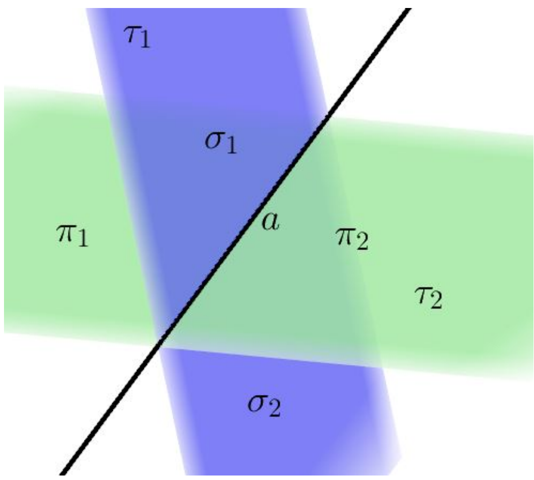
Kuva 5.16 *Tason kanssa kohtisuoraan olevat suorat ovat keskenään yhdensuuntaiset*

Oletetaan ensin, että piste E on pisteiden A ja B välissä ja se on suorien AB ja m leikkauspiste. Koska kolmioiden $\triangle PBC$ ja $\triangle QBC$ sivut PC ja QC ovat yhtä pitkät ja suorat n ja l ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, niin Aksiooman 2 perusteella myös kolmioiden sivut PB ja QB ovat yhtä pitkät. Samalla tavalla voidaan päätellä, että kolmioiden $\triangle PAC$ sivut PA ja QA ovat yhtä pitkät. Myös sivut PE ja EQ ovat yhtä pitkät, joten kolmiot $\triangle PBA$ ja $\triangle QBA$ ovat yhtenevät Lauseen 2 mukaan. Tästä seuraa, että myös kulmat $\angle PAB$ ja $\angle QAB$ ovat yhtä suuret.

Kolmiot $\triangle PAE$ ja $\triangle QAE$ ovat Aksiooman 2 mukaan yhtenevät, joten janat PE ja QE ovat yhtä pitkät. Nyt kolmiot $\triangle PEC$ ja $\triangle QEC$ ovat yhtenevät Lauseen 2 mukaan. Koska kolmion $\triangle PCE$ kulma $\angle PCE$ on yhtä suuri vieruskulmansa kanssa, ja koska yhdessä ne muodostavat oikokulman, täytyy molempien kulmien olla suoria kulmia. Näin ollen mielivaltainen tason τ suora m muodostaa suoran kulman suoran n kanssa.

Jos piste E ei sijaitse janalla AB, voi piste A sijaita janalla EB. Tällöin kulmien $\angle PAB$ ja $\angle QAB$ yhtenevyydestä seuraa vieruskulmien $\angle PAE$ ja $\angle QAE$ yhtenevyys. Kolmioiden $\triangle PAE$ ja $\triangle QAE$ yhtenevyys perustuu Aksioomaan 2 ja päätelmä on sama kuin ensimmäisessä tapauksessa. $\square$

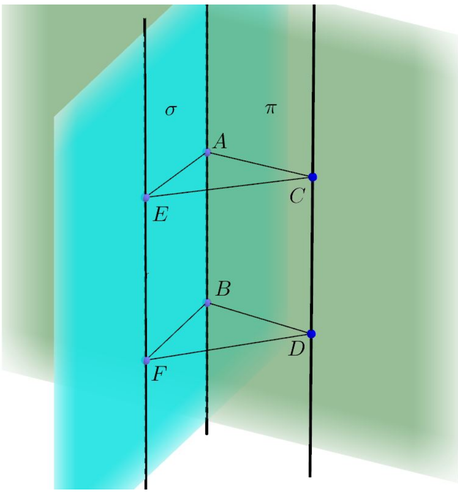
Olkoot τ_1 ja τ_2 tasoja, joiden leikkaussuora on a. Tasojen leikkaussuora jakaa molemmat tasot puolitasoiksi. Tason τ_1 puolitasoja merkitään tässä σ_1 ja σ_2 ja tason τ_2 π_1 ja π_2 (kuva 5.17).



Kuva 5.17 *Diedri muodostuu kahdesta puolitasosta.*

Tason τ_1 puolitaso σ_1 tai σ_2 ja tason τ_2 puolitaso π_1 tai π_2 muodostavat *diedrin*, eli kaksitahokkaan. Leikkaussuora a on diedrin särmä ja puolitasot sen kyljet.

Lause 18. *[23] Olkoon diedrin särmä a ja sen kyljet π ja σ. Oletetaan että pisteet A ja B sijaitsevat särmällä a, ja pisteet C ja D sivulla π niin, että puolisuorat AC ja BD muodostavat suoran kulman särmän a kanssa. Samoin oletetaan, että* *pisteet E ja F sijaitsevat sivulla σ niin, että puolisuorat AE ja BF muodostavat suoran kulman särmän a kanssa (kuva 5.18). Tällöin kulmat $\angle CAE$ ja $\angle DBF$ ovat keskenään yhtenevät.*



Kuva 5.18 *Diedrin kulma*

Todistus. [23] Voidaan olettaa, että puolisuorat AC ja BD ovat yhtenevät keskenään. Samoin voidaan olettaa puolisuorista AE ja BF. Tällöin $ABDC$ ja $EFBA$ ovat suorakaiteita, josta seuraa, että janat EF, AB ja CD ovat yhteneviä keskenään. Janat CD ja AB ovat keskenään yhdensuuntaiset kuten myös janat AB ja EF. Lauseen 15 mukaan janat CD ja EF ovat myös yhdensuuntaiset. Tällöin $ECDF$ on suunnikas ja janat EC ja FD ovat yhtenevät.

Tästä seuraa, että kolmiot $\triangle AEC$ ja $\triangle BFD$ ovat yhtenevät Lauseen 2 mukaan. Tällöin toisiaan vastaavat kulmat $\angle CAE$ ja $\angle DBF$ ovat yhtenevät, mikä oli alkuperäinen väite. □

Lauseen 18 kahden tason välistä kulmaa kutsutaan *diedrikulmaksi* [1]. Jos diedrikulma on suora, niin tasot ovat toisiaan vastaan kohtisuoria eli toistensa *normaalitasoja* [39].

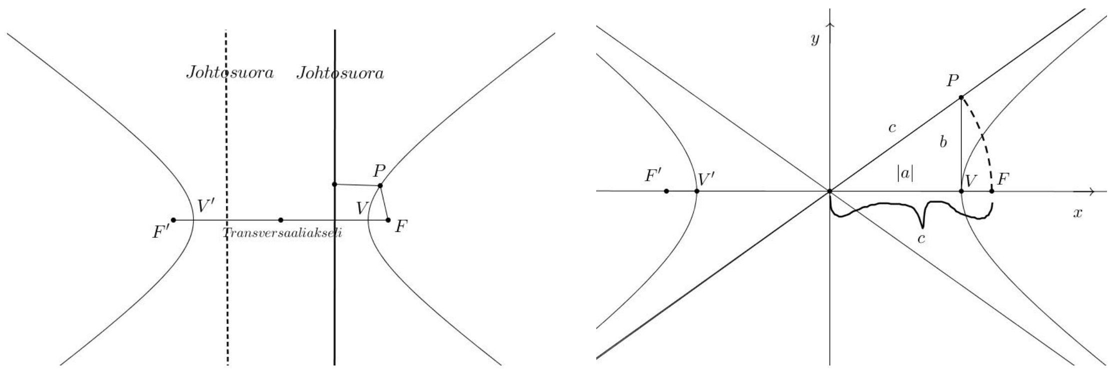
Lieriötä ja kartiota käsitellessä ei enää riitä tasogeometria ja edellä esitetty aksiomaattinen lähestymistapa. Lieriötä ja kartiota lähestyttäessä geometriaa käsitellään xyz-tasossa. Käytetään xyz-tasolle tässä merkintää $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{R}^3$ määritellään

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} . \tag{5.28}$$

Piste avaruudessa voidaan tällä tavoin määrittää kolmella koordinaatilla, jotka kaikki ovat reaalisia. Näitä koordinaatteja merkitään $P = (x, y, z)$. [12]

Lieriön ja kartion lisäksi tässä luvussa käsitellään myös yleisemmin *toisen asteen pintoja (Engl. quadrics).* Ne ovat pintoja, jotka sopivassa koordinaatistossa voidaan kuvata muuttujien x, y ja z toisen asteen yhtälön avulla. [1] Ennen toisen asteen pintojen käsittelyä on tarpeellista perehtyä vielä hieman hyperbeleihin tasokoordinaatistossa.

Hyperbeli koostuu niistä pisteistä, joiden etäisyyksillä kiinteään polttopisteeseen (F, F') ja kiinteään johtosuoraan (kuva 5.19) on vakiosuhde e. *Eksentrisyys* e saadaan polttopisteiden etäisyyksien erotuksen itseisarvona [38]. Eksentrisyys on hyperbelille suurempi kuin 1. [20] Hyperbeli on symmetrinen sen suoran suhteen, joka kulkee polttopisteen kautta ja on kohtisuorassa johtosuoraa vastaan. Tämä suora leikkaa hyperbelin kahdessa pisteessä $(a, 0)$ ja $(-a, 0)$, joita kutsutaan *vertekseiksi.* Janaa, joka yhdistää verteksit toisiinsa, kutsutaan *transversaaliakseliksi.* Hyperbeli on yksikäsitteisesti määrätty, kun tunnetaan trensversaaliakseli ja yksi polttopiste. [38]

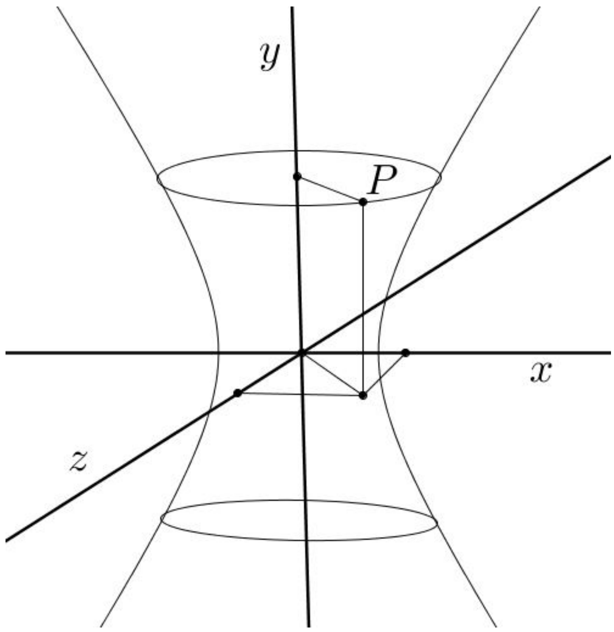


Kuva 5.19 *Hyperbeli*

Kun polttopisteeksi on valittu xy-tason pisteet $(c, 0)$ ja $(-c, 0)$, kun $c \geq 0$ ja vakioksi $e = 2a$, on hyperbelin yhtälö [20]

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \tag{5.29}$$

missä $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Lukuja a ja b sanotaan hyperbelin puoliakseleiksi. [20] Hyperbelin yhtälö on johdettu *ellipsin* yhtälöstä, sillä niillä on monia yhteisiä ominaisuuksia. Tässä hyperbelin kaavaa ei kuitenkaan todisteta, mutta kaavan johtamista voi tarkastella esimerkiksi lähteestä [1]. Pinta, joka muodostuu, kun hyperbeli pyörähtää akselin ympäri, voidaan ilmaista xy- tasossa. Näin muodostettu *hyperboloidi* on symmetrinen y- ja x-akselien suhteen ja sitä kutsutaan *yksivaippaiseksi hyperboloidiksi* (kuva 5.20) [38].



Kuva 5.20 *Hyperboloidi*

Hyperboloidin etäisyys y-akseliin pisteestä $P = (x, y, z)$ on $\sqrt{x^2 + z^2}$ (kuva 5.20). Piste P sijaitsee yksivaippaisella hyperboloidilla, jos ja vain jos piste $(\sqrt{x^2 + z^2}, y, 0)$ sijaitsee hyperbelillä (5.29). Näin ollen hyperboloidille saadaan yhtälö [1]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.30}$$

Mikäli hyperbeli pyörähtää transversaaliakselinsa ympäri, saadaan kaksivaippainen hyperboloidi.

Hyperbeli voidaan muodostaa myös niin, että hyperbelin transversaaliakseli yhtenee y-akselin kanssa ja keskipiste on yhä origossa. Tällöin syntyvän hyperbelin yhtälö [1] on

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1; \quad z = 0. \tag{5.31}$$

Yleisempi muoto yhtälölle (5.31) on [1]

$$-\frac{z^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1. \tag{5.32}$$

Yhtälön (5.31) kuvaama pyörähdyskappale on nimeltään *kaksivaippainen ympyrähyperboloidi*, ja yhtälön (5.32) kuvaama yleisempi versio on nimeltään *kaksivaippainen elliptinen hyperboloidi.* [1] Hyperpoloidien (5.30) ja (5.32) yhtälöt voidaan ilmaista myös muodossa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=d, \tag{5.33}$$

missä a, b ja c ovat mitä tahansa nollasta eroavia vakioita ja $d = -1, 0$ tai 1. Jos $d = -1$, kyseessä on kaksivaippainen hyperboloidi. Kun $d = 1$ on kyseessä yksivaippainen hyperboloidi. Tilannetta $d = 0$ käsitellään kartion yhteydessä (lauseke 5.35). Kaksivaippainen elliptinen hyperboloidi on esimerkki hyperbelin muodostamasta toisen asteen pinnasta. Lieriöiden ja kartioiden tapauksessa kahden tason pintaa rajoittavat hyperbelin sijaan suorat. [1]

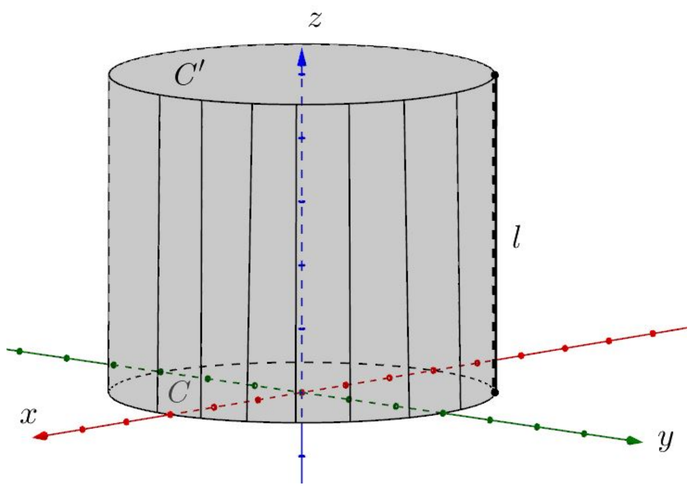
Määritelmä 5.6. *[20]* Lieriöpinta *muodostuu kaikista niistä pisteistä, jonka kautta suora kulkee liikkuessaan tasokäyrää pitkin ja pysyen jatkuvasti saman suuntaisena. Jos tasokäyrä on umpinainen (esimerkiksi ympyrä) ja muodostajana on vakiopituinen jana, saadaan rajoitettu lieriöpinta (kuva 5.21).*

Muodostajajanan päätepisteet sijaitsevat rajoitetun lieriöpinnan tapauksessa tasoissa, joita sanotaan *lieriön pohjiksi.* Lieriön pintaa sanotaan *vaipaksi.* Jos tukikäyrä on monikulmio, saadaan särmiöpinta, jota kutsutaan *prismaksi.* Mikäli muodostajasuora on kohtisuorassa pohjaan nähden, lieriö on *suora.* Suoraa lieriötä kutsutaan myös *sylinteriksi.* [20] *Elliptisen sylinterin* yhtälö on [1]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5.34}$$

Elliptinen sylinteri leikkaa xy-tason ellipsin muotoisella alueella. Jos sylinteri leikkaa xy-tason ympyrän muotoisella alueella, sitä kutsutaan *ympyräsylinteriksi* ($a = 1, b = 1$). Jos myös jana l (kuva 5.21) on kohtisuorassa tasokäyrää C vastaan, kutsutaan sylinteriä *suoraksi ympyräsylinteriksi.* Suorassa ympyräsylinterissä vakiot a ja b ovat yhtä suuret, ja sen poikkileikkaus on siis ympyrä. [20]

Määritelmä 5.7. *[38]* Kartiopinta *muodostuu kaikista niistä pisteistä, joiden kautta suora, joka kulkee pisteen P kautta, kulkee liikkuessaan tasokäyrää C pitkin. Piste P ja tasokäyrä C sijaitsevat eri tasoissa. Jos muodostajana on vakiopituinen jana, saadaan rajoitettu kartiopinta.*



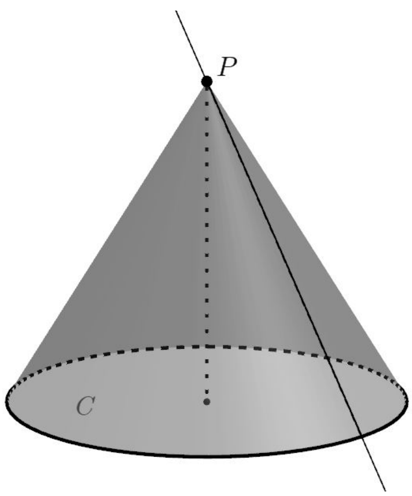
Kuva 5.21 *Sylinteri*

Muodostajajanan pistettä P kutsutaan kartion *kärkipisteeksi.* Tasokäyrän sisään jäävää aluetta kutsutaan *kartion pohjaksi* ja itse kartiopintaa *vaipaksi.* Muodostajajanaa kutsutaan myös kartion *sivujanaksi.*

Elliptisen kartion yhtälö on [1]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{5.35}$$

kun kartion piste P on asetettu origoon.



Kuva 5.22 *Kartio*

Jos tasokäyrä C on ympyrä, kutsutaan kartiota *ympyräkartioksi.* Jos suora, joka kulkee kartion pisteen P ja ympyrän C keskipisteen kautta on kohtisuorassa tasokäyrää vastaan, kutsutaan kartiota *suoraksi ympyräkartioksi.* [1] Suoralle ympyräkartiolle $a = b$ ja $c = 1$. Tällöin suoran ympyräkartion yhtälöksi saadaan

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2). \tag{5.36}$$

Kartion poikkileikkaus korkeudelta $|z|$ on ympyrä, jonka säde on $\left|\frac{z}{a}\right|$. [20]

Pallo voidaan määritellä toisen asteen pintana. Aiemmin käsitelty ympyrän yhtälö (5.4) on saadaan johdettua siitä, että tasossa kahden pisteen etäisyys on [3]

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{5.37}$$

Kolmiulotteisessa tapauksessa pisteen etäisyys on samaan tapaan [3]

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{5.38}$$

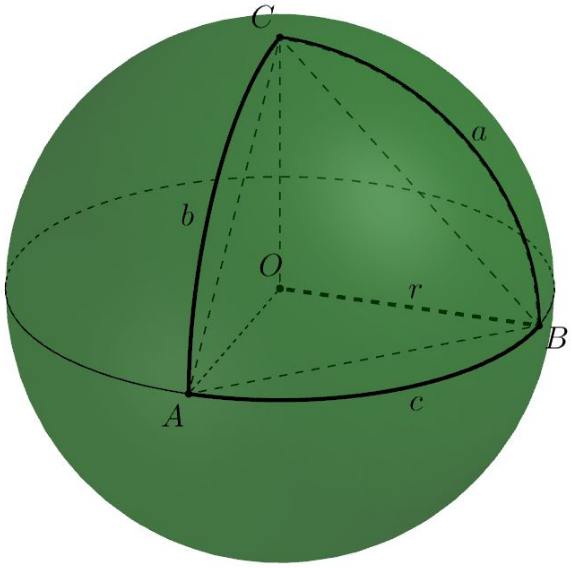
Määritelmä 5.8. Pallopinta *on pinta, joka muodostuu kaikista niistä pisteistä, jotka ovat samalla etäisyydellä r pisteestä O. Pistettä O kutsutaan tällöin pallon keskipisteeksi.*

Pallon yhtälö saadaan merkitsemällä Määritelmän 5.8 mukaan pisteen P etäisyys pallon säteeksi $d = r$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = r^2 \quad . \tag{5.39}$$

Jos taso leikkaa palloa, niin *leikkauskuvio* on ympyrä. Jos leikkauspinta kulkee pallon keskipisteen O kautta, ympyrän säde on yhtä suuri kuin pallon säde. Tätä leikkauskuviota kutsutaan *isoympyräksi.* Muulloin ympyrän säde on pallon sädettä pienempi. Muita leikkauskuvioita kutsutaan *pikkuympyröiksi.* Leikkauspinta jakaa pallon kahteen kappaleeseen, joita kutsutaan *pallosegmenteiksi.* Pallosegmenttejä vastaavat pallon pinnat ovat *kalotteja.* Jos yhdistetään kalotin reunakäyrä pallon säteillä sen keskipisteeseen, saadaan aikaan kappale, jota kutsutaan *pallosektoriksi.* [20]

Jos pallopintaa ajatellaan tasona ja isoympyröitä tasoilla olevina suorina, puhutaan epäeuklidisesta geometriasta. Epäeuklidinen geometria tarkoittaa, että siinä ei päde paralleeliaksiooma. Paralleeliaksiooman mukaan kaksi yhdensuuntaista suoraa eivät koskaan leikkaa toisiaan. Näin ei ole pallopinnalla. *Pallokolmio* (kuva 5.23) on pallopintageometriassa kolmio, joka muodostuu kolmen isoympyrän kaarista. Pallokolmioihin liittyvät laskut ovat *pallotrigonometriaa.* [20]



Kuva 5.23 *Pallo ja pallokolmio*

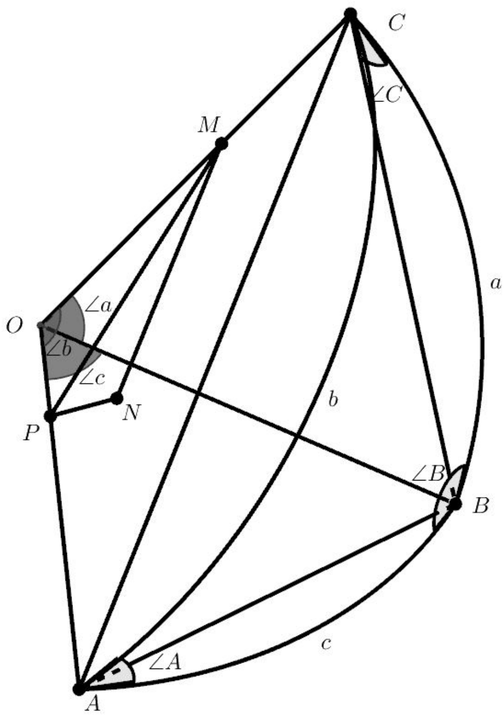
Pallokolmion kulmia merkitään tässä työssä $\angle A, \angle B$ ja $\angle C$. Kulmat yhdistävien isoympyrän kaarien pituudet ovat a, b ja c, ja pallokolmion kaaria vastaavia kulmia pallon keskipisteessä merkitään $\angle a, \angle b$ ja $\angle c$ (kuva 5.24). [23]

Lause 19. *[23] (Pallotrigonometrian sinilause) Pallokolmion sivujen pituuksille a, b ja c sekä kulmille $\angle A, \angle B$ ja $\angle C$ pätee*

$$\frac{\sin \angle a}{\sin \angle A} = \frac{\sin \angle b}{\sin \angle B} = \frac{\sin \angle c}{\sin \angle C} \quad . \tag{5.40}$$

Todistus. [23] Olkoon M suoran OC piste. Asetetaan pisteen M kautta janaa OA vastaan kohtisuora taso τ. Taso leikkaa janan OA pisteessä P. Valitaan tasolta OAB sellainen piste N, että jana MN on kohtisuorassa tasoa OAB vastaan. Nyt pisteet N ja P ovat tasojen τ ja OAB leikkaussuoralla. Koska jana MP on kohtisuorassa janaa OA vastaan, ja jana NP on kohtisuorassa janaa OA vastaan, niin kulma $\angle MPN$ on yhtä suuri kuin kulma $\angle A$. Kulma $\angle COA$ on myös kulma $\angle b$, joten jana MP saadaan laskettua $MP = \sin \angle b \cdot OM$ lausekkeen (5.6) mukaisesti.

Janalle MN saadaan samaan tapaan lauseke $MN = MP \cdot \sin \angle A$, joten janalle MN saadaan lauseke $MN = \sin \angle b \cdot \sin \angle A \cdot OM$. Lasketaan MN samaan tapaan asettamalla taso τ pisteen M kautta kohtisuoraan janaa OB vastaan, jolloin saadaan



Kuva 5.24 *Pallo ja pallokolmio*

$MN = \sin\angle a \cdot \sin\angle B \cdot OM$. Jos nämä kaksi tulosta asetetaan yhtä suuriksi, saadaan

$$\begin{aligned} \sin\angle a \cdot \sin\angle B \cdot OM &= \sin\angle b \cdot \sin\angle A \cdot OM \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\sin\angle a}{\sin\angle A} &= \frac{\sin\angle b}{\sin\angle B} \end{aligned} \tag{5.41}$$

Yhtälön (5.40) toinen osa todistetaan samalla tavalla.

□

Ensimmäisen oppitunnin opiskelijat käyttivät tutustumalla omaan aiheeseensa. Opetusharjoittelija oli tehnyt jokaiselle ryhmälle tehtävämonisteet, joiden avulla opiskelijat lähestyivät aihetta. Tehtävämonisteet oli tehty jokaiseen aiheeseen erikseen, mutta perusajatukseltaan ne olivat samanlaisia. Esimerkkinä ohjeet ryhmälle ”kulma avaruudessa”:

1. Lukekaa yhdessä teoria sekä esimerkit sivuilta 126-131. Kyselkää ja keskustelkaa. Tämän tunnin jälkeen teistä tulee tämän aihealueen asiantuntijoita, ja uuden ryhmän osaaminen tältä alueelta riippuu vahvasti osaamisestanne.

2. Keskustelkaa ryhmässä ainakin seuraavista asioista:

- Mitä tarkoitetaan kulmalla avaruudessa?
- Keksikää jokin käytännön sovellus, joka liittyy suoran ja tason väliseen kulmaan. Missä tätä voisi tarvita?
- Mitä eroa on tason ja suoran leikkauspisteellä ja kahden tason leikkauksella?

Tehkää yhdessä keskustellen tehtävät 297, 299, 308, 309, 302, 311 HUOM! Ryhmän vastuulla on, että jokainen oppii tämän asian. Auttakaa siis toisianne!

3. Keskustelkaa vielä, miten kulma avaruudessa kannattaisi opettaa muille? Mitkä ovat aiheen vaikeimmat asiat?

4. Tehkää ensi tunniksi yhdessä paperille ohjeet, jotka helpottavat kappaleen tehtävien tekemistä. Muut ryhmät eivät lue teoriaa kirjasta, joten on tärkeää, että laitatte kaiken oleellisen paperille selkeästi, jotta ensi tunnilla uudet ryhmät pääsevät nopeasti asiaan.

Kaikki ryhmät tulivat oman aiheensa asiantuntijoiksi tehtäviä tekemällä ja keskustelemalla. Jokainen ryhmä teki myös A3 kokoiselle paperille muistiinpanot aiheestaan. Kotitehtäväksi opiskelijat saivat yhteensä kuusi peruslaskutehtävää jokaisesta aiheesta, jotta seuraavalla tunnilla ryhmä pääsee pikaisesti soveltavien tehtävien pariin.

Seuraavalla tunnilla opiskelijat jaettiin uudelleen ryhmiin niin, että jokaisessa ryhmässä oli jokaisen aiheen asiantuntijoita. Uudet ryhmät alkoivat selvittää sirkusaiheisia soveltavia tehtäviä, joissa tarvittiin kaikkia asiantuntijoita. Tehtäviä tehtiin pisteellä noin $10 - 15$ minuutin ajan, jonka jälkeen siirryttiin seuraavaan pisteeseen. Tehtävät vaativat kuitenkin paljon enemmän aikaa, joten tehtävän teko jätettiin kesken ja seuraava ryhmä jatkoi tehtävän ratkaisua siitä mihin edellinen oli jäänyt. Tehtävät ovat liitteenä (LIITE C). Tunti eteni niin, että jokainen ryhmä kävi jokaisella pisteellä ja jatkoi ratkaisua siitä mihin edellinen ryhmä oli jäänyt. Viimeisenä pisteellä oleva ryhmä viimeisteli ratkaisun ja esitti sen koko luokalle. Kotitehtäväksi opiskelijat saivat yhteensä kuusi tehtävää jokaisesta aihealueesta.

5.7 Projekti X

Projekti X oli koko opetusjakson ajan kestävä projekti, jonka opiskelijat toteuttivat valitsemissaan ryhmissä. Projektin tehtävänä oli yhdistää sirkusta ja matematiikkaa. Opiskelijat tekivät matematiikan projektin, joka käsitteli geometriaan (kurssiin) liittyvää ongelmaa tai käsitettä ja he esittivät sen lopulta sirkuksen keinoin. Sisältönä tuli olla jokin geometrian sovellus tai ongelma ja esitystavan tuli olla visuaalinen. Esityksessä sai käyttää esimerkiksi sirkusvälineitä, videota, powerpointia tai musiikkia. Projektissa tuli olla myös jokin sirkusväline tai -temppu jota käsitellään matematiikan avulla. Työstä tehtiin myös kirjallinen osuus, jonka minimi pituus oli yksi sivu ryhmän jäsentä kohti. Työohje on liitteenä D, mutta se löytyy myös iTunesU:sta [14]. Työohjeessa on myös esimerkkiaiheita.

Kurssilla oli suunniteltu, että seitsemäs tunti käytettäisiin projekti X esityksiin. Koululla oli kuitenkin tällöin informoimatta jäänyt tapahtuma, jonka johdosta iso osa opiskelijoista oli poissa. Tämän vuoksi projekti X:n esitykset päätettiin jättää seuraavalle tunnille ja kurssin oma opettaja piti kertaustunnin, jolloin opiskelijat saivat tehdä kertaustehtäviä koetta varten tai viimeistellä projekti X:ää. Myös seuraavalla tunnilla osa opiskelijoista oli poissa, jolloin esitykset päätettiin pitää kahdessa osassa. Ensimmäisellä tunnilla pidettiin kolme esitystä, ja toisella neljä. Loput tunneista käytettiin kertaamiseen, sillä heti toisen esitystunnin jälkeen alkoi kurssikoe. Julkaisuun luvan antaneiden opiskelijoiden projektit löytyvät iTunesU:sta. Näiden projektien aiheita olivat kärrynpyörän matemaattinen mallintaminen, päälläseisonta, rolabola ja pyramidit. Pääasiassa näistä tutkittiin kulmia tai etäisyyksiä, joilla temppu onnistuu. Myös piin historiasta tehtiin runo, joka esitettiin luokalle, mutta runoa ei julkaistu iTunesU:ssa.

Opetusharjoittelija arvosteli työt seuraavalla tavalla

- Esiintyminen max. 2p.
  0 p. Ei paikalla.
  1 p. Työn esittäminen luokan edessä
  2 p. Selkeä ja harkittu esiintyminen
- Työskentely 2p.
  0 p. Ei valmista työtä tai työ puutteellinen
  1 p. Oma-aloitteisuus, huolellinen työn valmistaminen esitykseksi
  2 p. Motivoitunut ja ahkera ote työhön, itsenäinen työskentely, aikataulussa pysyminen
- Kirjallinen osuus 4p.
  0 p. Ei palautettua kirjallista työtä
  1 p. Puutteellinen kirjallinen työ, haastavuustaso matala
  2 p. Työssä esitetty selkeät laskut ja sovellettu niitä sirkukseen, matala haastavuustaso
  3 p. Selkeä työ, jossa loogisesti esitetty työssä käytetty matematiikka

4 p. Selkeä työ, jossa tulee esille työn sirkus- ja matemaattinen tausta sekä työn tarkoitus, looginen rakenne

Opiskelija saattoi saada projekti X:stä yhteensä kahdeksan pistettä, jotka lisättiin hyväksytyn kokeen pisteisiin.

6. TULOSTEN ANALYSOINTI

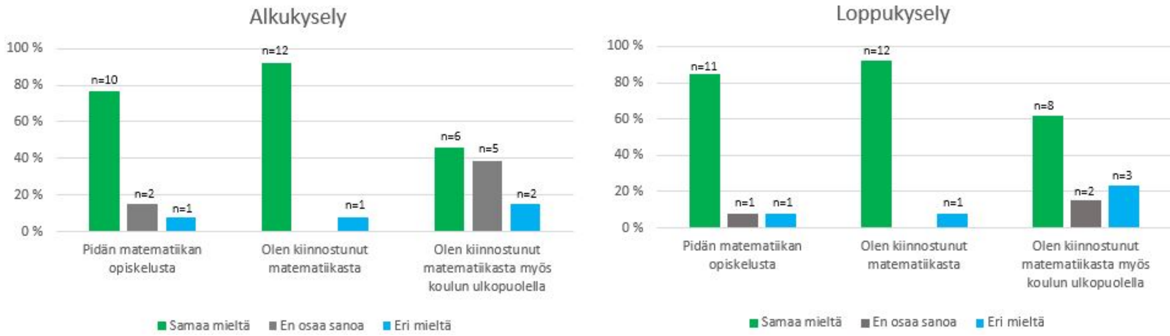
Tutkimuksessa pääasiallisina aineistoina käytettiin opiskelijoille tehtyjä kyselyitä (LIITE A ja B), opetusharjoittelijan ja tunteja seuranneiden opetusharjoittelijoiden huomioita tunneista sekä opiskelijoiden ja vertailuryhmän koepisteitä. Luvussa 6.1 on analysoitu opiskelijoiden vastauksia monivalintaväitteeseen "Sirkus toi lisäarvoa opiskeluuni" sekä sitä seuranneeseen avoimeen kysymykseen "Jos vastasit edelliseen kysymykseen olevasi osittain, jokseenkin tai täysin samaa mieltä siitä, että sirkus tuo lisäarvoa opiskelullesi, perustele vastauksesi". Myös opiskelijoiden antama avoin palaute opetusharjoittelijalle on huomioitu aineistoa analysoitaessa. Huomiota on kiinnitetty opetusharjoittelijan omaan kokemukseen menetelmästä luvussa 6.2 sekä muiden opetusharjoittelijoiden antamaan kirjalliseen palautteeseen luvussa 6.3. Luku 6.4 vertaa opiskelijoiden tuloksia vuotta aikaisemman ryhmän tuloksiin.

6.1 Opiskelijoiden kokemus opetuksesta sirkuksen avulla

Monivalintakysymyksien tarkoituksena oli tutkia mahdollista muutosta opiskelijoiden minäkäsityksessä sekä ulkoisessa ja sisäisessä motivaatiossa. Alkukyselyyn osallistui vain 13 opiskelijaa, sillä moni oli poissa ensimmäiseltä tunnilta. Koska kaikki 13 opiskelijaa olivat paikalla loppukyselyssä, on näiden asennetekijöiden tutkiminen tehty näille opiskelijoille ja muut loppukyselyyn vastanneet on jätetty huomiotta tässä tarkastelussa.

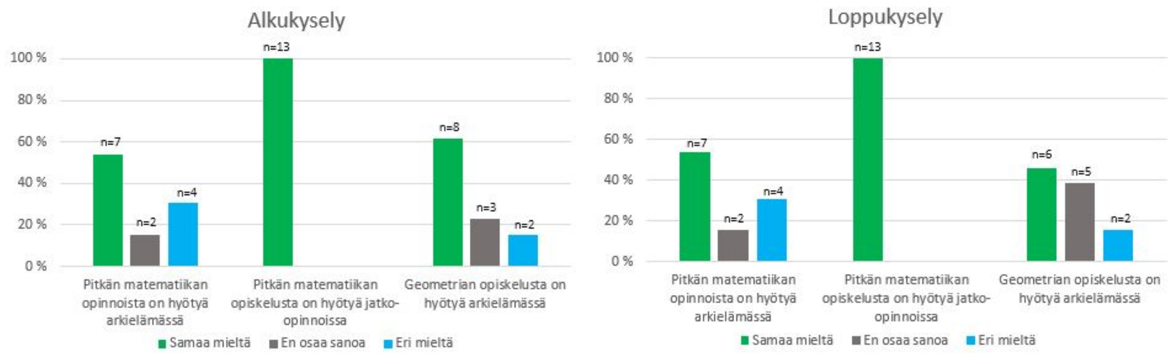
Motivaatio ja minäkäsitys

Sisäisestä motivaatiosta kertoivat monivalintakysymysten väittämät "Pidän matematiikan opiskelusta", "Olen kiinnostunut matematiikasta" sekä "Olen kiinnostunut matematiikasta myös koulun ulkopuolella". Vastaukset väittämiin on esitetty kuvassa 6.1. Opiskelijat olivat tuloksien perusteella sisäisesti motivoituneita. Noin 80 % (n=13) oli samaa mieltä väitteen "Pidän matematiikan opiskelusta" kanssa ja vain yksi opiskelija eri mieltä. 90 % (n=13) opiskelijoista kokivat olevansa kiinnostuneita matematiikasta. Hieman alle puolet opiskelijoista koki olevansa kiinnostunut matematiikasta myös koulun ulkopuolella. Kaksi opiskelijaa oli tästä eri mieltä.



Kuva 6.1 *Opiskelijoiden vastaukset sisäiseen motivaatioon liittyviin väittämiin alku- ja loppukyselyssä*

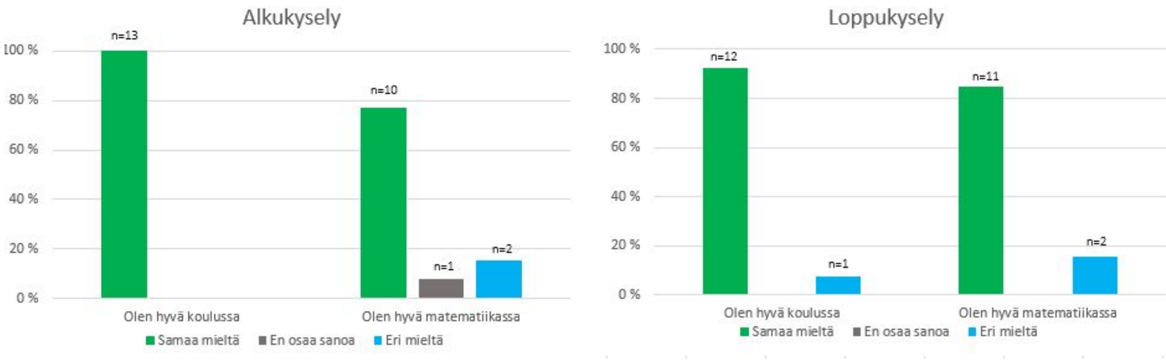
Ulkoiseen motivaatioon viittasivat väittämät "Pitkän matematiikan opiskelusta on hyötyä jatko-opinnoissa", "Pitkän matematiikan opinnoista on hyötyä arkielämässä" sekä "Geometrian opiskelusta on hyötyä arkielämässä". Vastaukset ulkoiseen motivaatioon liittyviin väittämiin on esitetty kuvassa 6.2. Väittämän "Pitkän matematiikan opinnoista on hyötyä arkielämässä" kanssa samaa mieltä oli noin puolet opiskelijoista, ja eri mieltä oli noin 30 % (n=13). Sen sijaan kaikki olivat samaa mieltä väittämän "Pitkän matematiikan opiskelusta on hyötyä jatko-opinnoissa". Kaksi opiskelijaa, jotka olivat vastanneet olevansa kiinnostuneita matematiikasta myös koulun ulkopuolella, eivät loppukyselyssä osanneet sanoa kantaansa väitteeseen.



Kuva 6.2 *Opiskelijoiden vastaukset ulkoiseen motivaatioon liittyviin väittämiin alku- ja loppukyselyssä*

Minäkäsitystä mittaamaan oli laadittu väittämät "Olen hyvä koulussa" ja "Olen hyvä matematiikassa". Opiskelijoiden vastaukset minäkäsitykseen liittyviin väittämiin on esitetty kuvassa 6.3. Kaikki opiskelijat kokivat olevansa hyviä koulussa. Kaksi opiskelijaa olivat väitteen "Olen hyvä matematiikassa" kanssa eri mieltä. Luokan minäkäsitys tuntui olevan kuitenkin kohtalaisen hyvä kyselyn vastausten perusteella.

Opiskelijoiden vastaukset väittämiin olivat hyvin samanlaisia sekä alku- että lop-

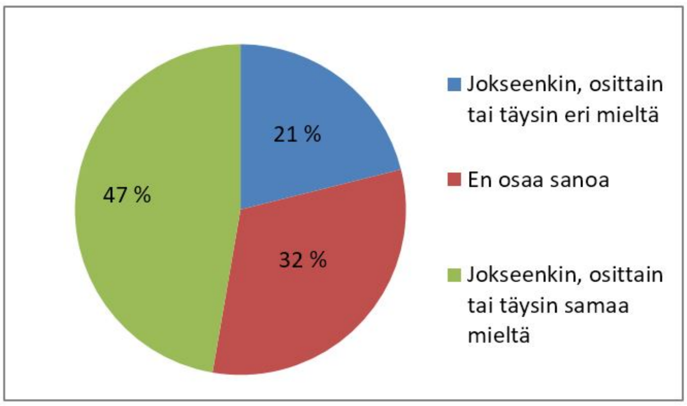


Kuva 6.3 *Opiskelijoiden vastaukset minäkäsitykseen liittyviin väittämiin alku- ja loppukyselyssä*

pukyselyssä ja erot kyselyiden välillä koskivat yhtä tai kahta opiskelijaa. Opiskelijoiden vastaukset ryhmiteltiin kolmeen ryhmään siten, että täysin, jokseenkin ja osittain samaa mieltä muodostivat yhden ryhmän, toisen ryhmän muodostivat täysin, jokseenkin ja osittain eri mieltä ja kolmannen ”en osaa sanoa”.

Sirkuksen tuoma lisäarvo opiskeluun

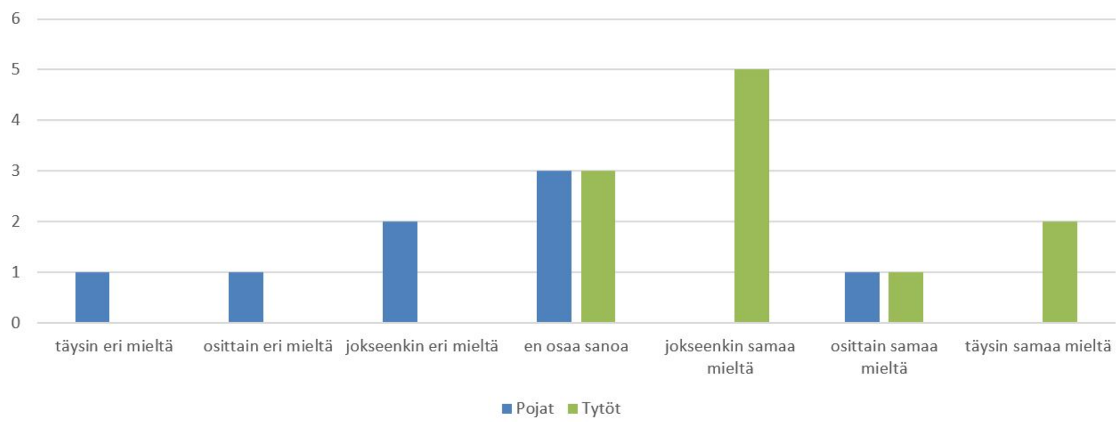
Loppukyselyssä (n=19) opiskelijat vastasivat monivalintatehtävään ”Sirkus toi lisäarvoa opiskeluuni”. Vastausvaihtoehdot olivat Likert-asteikon (1-7) mukaisia. Vastausvaihtoehtoina olivat ”Täysin samaa mieltä”, ”Osittain samaa mieltä”, ”Jokseenkin samaa mieltä”, ”En osaa sanoa”, ”Jokseenkin eri mieltä”, ”Osittain eri mieltä” ja ”Täysin eri mieltä”. Kysely oli suoritettu socrative-ohjelmiston avulla, jossa väitteiden vastausvaihtoehdot olivat allekkain edellä mainitussa järjestyksessä. Opiskelijoiden vastaukset väittämään on esitetty kuvassa 6.4.



Kuva 6.4 *Vastaukset väittämään "Sirkus toi lisäarvoa opiskeluuni"*

Yhdeksän opiskelijaa olivat jokseenkin, osittain tai täysin samaa mieltä väittämän kanssa. Kuusi opiskelijaa ei osannut sanoa, toiko sirkus lisäarvoa opiskeluun. Neljä opiskelijaa oli jokseenkin, osittain tai täysin erimieltä väittämän kanssa. Kolme opiskelijaa kertoi tunnilla, ettei ymmärtänyt mitä ”lisäarvoa opiskeluun” tarkoitti. Opetusharjoittelija selvensi kysymyksen jokaiselle erikseen. Opiskelijoiden kokemukset sirkuksen tuomasta lisäarvosta jakaantuivat kuvan 6.5 esittämällä tavalla. Vastaajista 11 oli tyttöjä ja 8 poikia. Kuusi opiskelijaa vastasi ”en osaa sanoa”.

Opiskelijoiden menestyksellä kurssikokeessa ei näyttänyt olevan yhteyttä siihen, miten he yllä olevaan kysymykseen vastasivat. Vastaukset väittämään olivat selkeästi erilaisia tytöillä ja pojilla. Pojat olivat useammin eri mieltä väitteen kanssa kuin tytöt.



Kuva 6.5 *Tyttöjen ja poikien vastaukset väittämään "sirkus toi lisäarvoa opiskeluuni"*

Kukaan tytöistä ei ollut sitä mieltä, että sirkus ei olisi tuonut lisäarvoa heidän opiskeluunsa. Pojista vain yksi oli sitä mieltä, että sirkus toi lisäarvoa opiskeluun. Vastausten hajonta oli suurempaa pojilla kuin tytöillä. Kun vastausvaihtoehtoja merkittiin täysin samaa mieltä = 7, osittain samaa mieltä = 6, ... , en osaa sanoa = 4, ... , täysin eri mieltä = 1, saatiin vastausten keskiarvoksi noin $4,4$. Kaikkien vastausten keskihajonta on tällöin $1,5$. Poikien vastausten keskiarvo on $3,4$ ja keskihajonta noin $1,4$. Tyttöjen keskiarvo on huomattavasti korkeampi, noin $5,2$ ja keskihajonta pienempi, noin $1,0$. Keskihajonnan σ laskemiseksi käytettiin kaavaa

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\overline{x})^2}{n}}, \tag{6.1}$$

missä $\overline{x}$ on populaation keskiarvo, x on muuttuja ja n tapausten lukumäärä ($n = 19$).

Vastaukset luokiteltiin uudelleen siten, että luvulla 1 merkittiin vastausta ”Täysin eri mieltä”, luvulla 2 vastauksia ”Jokseenkin eri mieltä” sekä ”Osittain eri mieltä”, luvulla 3 vastausta ”En osaa sanoa”, luvulla 4 vastauksia ”Osittain samaa mieltä” sekä ”Jokseenkin samaa mieltä” ja luvulla 5 vastausta ”Täysin samaa mieltä”. Vastausten keskiarvo ($n = 19$) oli noin $3,3$. Keskiarvon 95 % luottamusväli on $2,8$ – $3,8$.

Opiskelijoiden vastaukset avoimiin kysymyksiin

Avoimiin kysymyksiin vastasi 19:stä opiskelijasta 18. Jos opiskelija vastasi olevansa samaa mieltä siitä, että sirkus toi lisäarvoa opiskeluun, häntä pyydettiin perustelemaan vastauksensa avoimella kysymyksellä. Jos opiskelija oli väittämän kanssa eri mieltä, tai jos hän oli vastannut ”en osaa sanoa”, hän sai siirtyä antamaan yleistä palautetta kurssista. Avoimien kysymysten vastaukset analysoitiin teemoittelemalla vastauksia neljään eri teemaan:

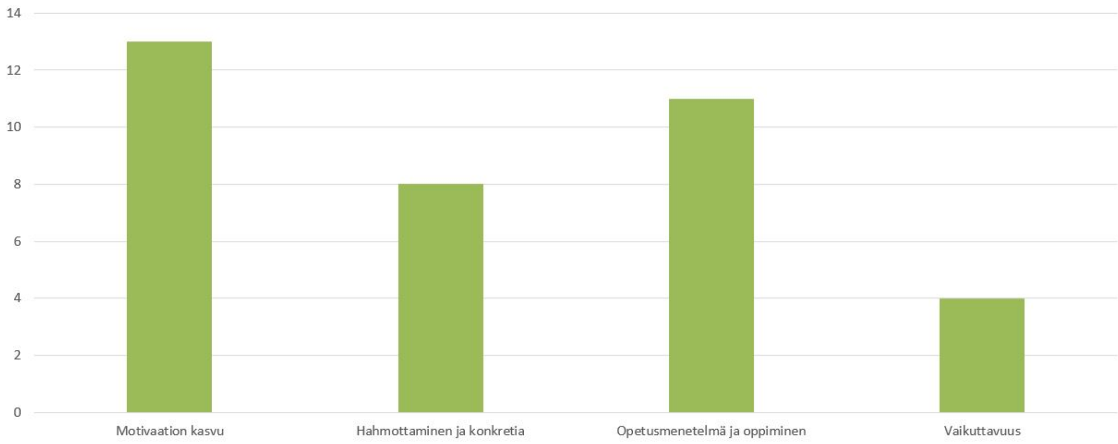
- motivaation kasvuun tai tuntien mielekkyyteen viittaavat palautteet
- hahmottamiseen ja konkretiaan viittaavat palautteet
- vaikuttavuuteen viittaavat palautteet
- opetuksen vaikuttavuuteen viittaavat palautteet
- suoraan opetusmenetelmään ja oppimiseen viittaavat palautteet.

Teemoittelun avulla koodatut vastaukset näkyvät kuvassa 6.6. Teemat on valittu aineistosta, eikä niitä ole päätetty etukäteen.

Tuntien mielekkyyteen ja motivaation kasvuun viittaavat kommentit kertoivat yleensä siitä, että tunnilla oli ollut mukavaa ja mielenkiinto heräsi. Eräs opiskelija perusteli olleensa samaa mieltä väittämän "Sirkus toi lisäarvoa opiskeluuni" näin:

”Se (sirkus) *toi mielenkiintoa ja osoitti miten matematiikan voi liittää käytännön elämään. Lisäksi oli mukava tehdä erilaisia asioita kuin normaalitunneilla.”*

Myös neljästä eri mieltä väittämän kanssa olleista opiskelijoista kaksi totesi sirkusopetuksen olleen mukavaa vaihtelua ja esimerkkien olleen hyviä. Opiskelija, joka ei ollut osannut sanoa olevansa samaa tai eri mieltä väitteen kanssa antoi palautetta tunneista:



Kuva 6.6 *Teemoittelun mukaiset vastaukset vastanneilta opiskelijoilta* $(n = 18)$

"Oli ihan hauska juttu toi sirkus. Se teki opiskelusta vähemmän pänttäämistä. Learning Cafe oli ehkä hiukan sekava, mutta hyvää vaihtelua".

Hahmottamiseen ja konkretiaan teemoiteltuja vastauksia oli kahdeksan. Tämän teeman sisällä opiskelijat kertoivat opetustyylin olleen selkeä ja helpottaneen hahmottamista. Eräs opiskelija perusteli vastaustaan:

”(Sirkus) *toi konkreettisuutta ja helpotti hahmottamaan asioita todellisuudessa, eikä vaan paperilla*”.

Vaikuttavuudella tarkoitetaan tässä teemoittelussa sitä, että opiskelijat eivät koe matematiikkaa jäykkänä ja irrallisena, vaan ymmärtävät sen merkityksen myös luokkahuoneen ulkopuolella. Neljä opiskelijaa kertoi, että osaa nyt yhdistää matematiikkaa muuallekin kuin kouluun. Eräs opiskelija vastasi näin:

”*Se todisti esimerkiksi, että laskuista, jota tunnilla käsittelemme, voi olla hyötyä juuri esimerkiksi työelämässä (sirkusopettajan työssä)*”.

Suoraan opetusmenetelmään tai oppimiseen viittasi vastauksissaan 11 opiskelijaa. Tässä teemassa opiskelijoiden vastauksissa mainittiin opetuksen selkeys, monipuolisuus ja laadukkuus, mutta toisaalta se, etteivät opiskelijat kokeneet oppineensa Learning caféssa kunnolla. Myös aikatauluongelmat ryhmätöissä mainittiin. Tässä teemassa oli selkeästi eniten negatiivisia kommentteja opetuksesta, mutta kaikki negatiiviset kommentit kohdistuivat Learning café -opetusmenetelmään tai ryhmätöihin. Opiskelija, joka oli vastannut olevansa osittain eri mieltä siitä, että sirkus olisi tuonut lisäarvoa opiskeluun, kirjoitti palautteeseen tunneista ja learning caféstä:

" [...], *opettaminen oli selkeää ja opin ihan hyvin. En itse pitänyt viimeisestä learning cafe-kokeilusta. Liian paljon asiaa liian lyhyellä ajalla, perinteinen opetus sopii paljon paremmin.*"

Prosentuaalisesti opiskelijoista suurin osa koki vastausten perusteella opetuksen motivoivaksi, mielenkiintoa herättäväksi tai mielekkääksi. Motivaation kasvuun liittyvään teemaan viittasi noin 72 % vastauksista. Hahmottamiseen ja konkretiaan taas viittasi noin 44 % vastauksista. Opetuksen vaikuttavuuteen viittasi noin 22 %. Opetusmenetelmään ja oppimiseen liittyviä vastauksia oli noin 61 %, joista noin 45 % liittyi ryhmätöihin tai Learning café -opetusmenetelmään.

6.2 Opetusharjoittelijan kokemus opetuksesta sirkuksen avulla

Opetusharjoittelija piti kaikki sirkusteemaiset tunnit, ja on myös tämän tutkimuksen tekijä. Hän käytti opetuskokeilun suunnitteluun paljon aikaa ja arvioi, että yhtä opetustuntia kohti suunnitteluun kului aikaa noin kahdeksan tuntia. Aikaa kului lähinnä sirkusesimerkkien suunnitteluun sekä töiden valmistamiseen ja kokeilemiseen. Opetusharjoittelijan tutkimusjakson ajan pitämässä päiväkirjassa hän kertoo, miten tunnit edistyivät, millainen oli opiskelijoiden ja opetusharjoittelijan oma mieliala sekä millaisia tunteita ja ajatuksia opetusharjoittelijalle tunnin jälkeen heräsi.

Jokaisella tunnilla opetusharjoittelija kuvaa luokan ilmapiirin muuttumista positiivisesti siirryttäessä sirkusteemaiseen opetukseen. Tunnelma luokassa rentoutui ja opiskelijat vaikuttivat innostuneilta. Hän kuvaa tutkimusjakson ensimmäisen tunnin alkua:

" [...] (opiskelijat) *olivat empaattisen oloisia, joskin alussa aika hiljaisia. Suuri muutos opiskelijoiden käytöksessä, kun alettiin työpajatoimintaan. Suurin osa selkeästi innostui* [...]"

Learning café toteutettiin kahden oppitunnin aikana. Ensimmäisen tunnin jälkeen opetusharjoittelija oli sitä mieltä, että tunnilla oli ollut liikaa uutta asiaa. Learning cafén toista tuntia opetusharjoittelija kuvaa näin:

"*Aamulehden toimittajien läsnäolo toi luokkaan hieman jännittyneen tunnelman, mutta itse en kokenut suurta jännitystä, sillä tunnissa oli niin paljon tekemistä,* *hallittavaa ja liikkuvia osia, että ajatukseni olivat siinä täysin kiinni. Tunnin yleistunnelma oli hyvä, vaikka ihan riemunkiljahdustasolle ei päästykään. Learning cafe sujui hyvin mutta ehkä menetelmän tuoreudesta johtuen vielä hieman kankeutta havaittavissa. Tehtävät olivat kuitenkin hyviä, ja iso osa opiskelijoista innostui niistä.*"

Toisen learning café -tunnin jälkeen opetusharjoittelija oli tyytyväinen tunnin onnistumiseen, vaikkakin asiaa oli liikaa. Opetusharjoittelija koki, että tunnin sirkusesimerkit olivat onnistuneita ja palvelivat oppimista. Kaikki esimerkit olivat sirkusmaailmasta, eivätkä ne tuntuneet väkisin tehdyiltä tai teennäisiltä. Opetusharjoittelija oli kuitenkin sitä mieltä, että tunnit olisivat samoilla sirkusesimerkeillä saattaneet onnistua paremmin ilman learning café -menetelmää. Kokonaisuudessaan opetusharjoittelija piti opetuskokeilua onnistuneena. Onnistumisista hän halusi nostaa esiin opiskelijoiden innostuksen projekti X:ää kohtaan, sirkusvälineiden tuomisen luokkaan ja niiden toimivuuden havainnollistamisvälineinä. Opetusharjoittelija esitti kuitenkin huolensa siitä, johtuiko opiskelijoiden huono läsnäoloprosentti projekti X:n esityspäivänä liiasta jännityksestä tai esiintymisestä aiheutuvasta ahdistuksesta.

6.3 Seuraajien kokemus opetuksesta sirkuksen avulla

Opetusta seurasivat sekä ohjaava opettaja että muutama muu normaalikoulun opetusharjoittelija. Kaksi opetusharjoittelijaa antoi palautteen tunneista kirjallisena. Nämä palautteet ovat teemoiteltu samaan tapaan kuin opiskelijoiden avoimet vastaukset. Ainoastaan vaikuttavuuteen viittaava teema on jätetty pois, sillä siihen ei palautteissa viitattu. Osa palautteista oli kohdistettu tunteja pitäneeseen opetusharjoittelijaan eikä niinkään opetusmenetelmään, joten ne osiot on jätetty huomioimatta, mikäli niillä ei ole todettu olevan vaikutusta tutkimuksen aiheeseen.

Toinen kirjallista palautetta antanut opetusharjoittelija oli seuraamassa yhtä tuntia. Seurattu tunti oli Learning cafén toinen tunti, jota oli seuraamassa myös kaksi sanomalehteen opetuskokeilusta artikkelia tekevää toimittajaa. Opetusharjoittelija oli huomannut opiskelijoissa tästä syystä jännittyneisyyttä, mikä oli kuitenkin purkautunut pian työpisteisiin siirtymisen jälkeen. Opiskelijoiden motivaatioon opetusharjoittelija oli viitannut kommentoidessaan työpistetyöskentelyä:

"*Myös* (learning cafén) *tehtävät olivat mielestäni sopivan tasoisia. Tämä näkyi siinä, että kaikki opiskelijat olivat koko ajan kiinni tehtävissä ja työrauha säilyi* *todella hyvin. Tehtävien sitominen konkretiaan oli mielestäni myös toteutettu erittäin hyvin*"

Opetusta seurannut opetusharjoittelija kommentoi tehtävien konkreettisuutta positiiviseen sävyyn. Hänen mielestään learning caféta on kuitenkin vielä varaa hioa ja kehittää, ja hän mainitsee, että tehtäviä tehdessä opiskelijoille tulisi korostaa enemmän tehtävien dokumentoinnin tärkeyttä.

Toinen opetusharjoittelija oli seuraamassa useampaa tuntia. Hän teki myös yhden tunnin rinnakkaisopettajana tutkimusjaksolla. Rinnakkaisopetustunti oli learning cafén ensimmäinen tunti. Ensimmäisestä tunnista hän kertoo havainneensa motivoitunutta työntekoa opiskelijoiden osalta. Tunti työpisteineen sai ainoastaan positiivista palautetta. Tunnin onnistumista hän kuvailee seuraavalla tavalla:

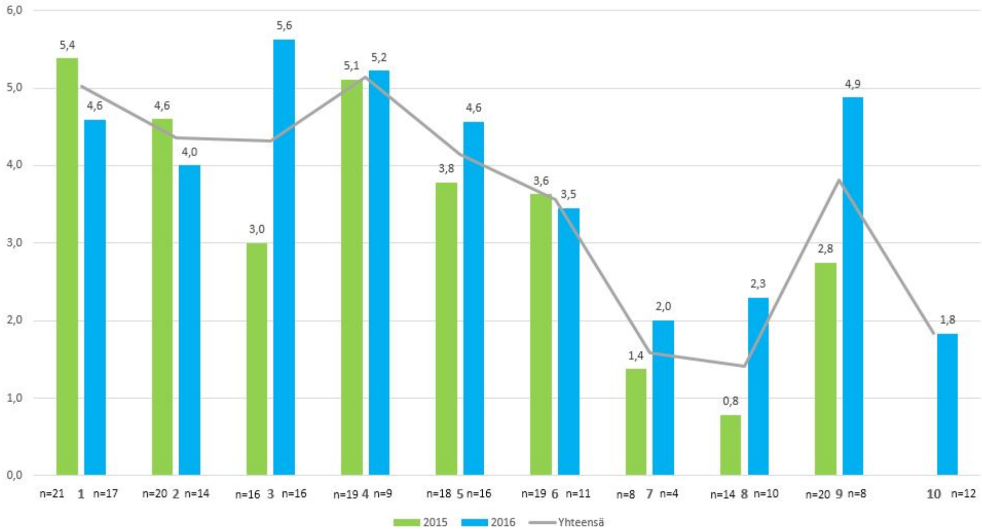
"*Ensimmäinen tunti olikin ihan loistava, opiskelijat olivat ihan innoissaan mittailemassa. Usein kun keskittyy siihen omaan työhönsä, esim. nyt tähän tutkimukseen, itse asia saattaa unohtua. Nyt asiaa tuli ja opiskelijat taisivat oppia huomaamattaan*"

Kritiikkiä myös toiselta opetusharjoittelijalta sai osakseen learning café, jonka toisella tunnilla hän oli rinnakkaisopettajana. Hän koki, että "*kaikki ei mennyt perille asti*", ja erityisesti kulma avaruudessa -työpiste oli liian haastava ilman konkreettista esimerkkiä.

6.4 Vertailu vuotta aikaisempaan ryhmään

Vuotta aikaisemmin (2015) järjestetyllä kurssilla MAA03 opiskelijat tekivät saman tyyppisen kokeen kuin kurssilla, jolla tutkimus suoritettiin. Kurssille osallistui vertailuryhmässä 31 opiskelijaa, joista kahdeksan, eli noin 26 %, jätti tulematta kokeeseen tai ei vastannut yhteenkään kysymykseen. Tehtäviä oli tämän vuoden kurssikokeessa yhteensä yhdeksän ja kaikkien maksimipistemäärä oli kuusi. Kokeen 2015 keskiarvo oli $25,29$ pistettä mahdollisesta 42:sta pisteestä.

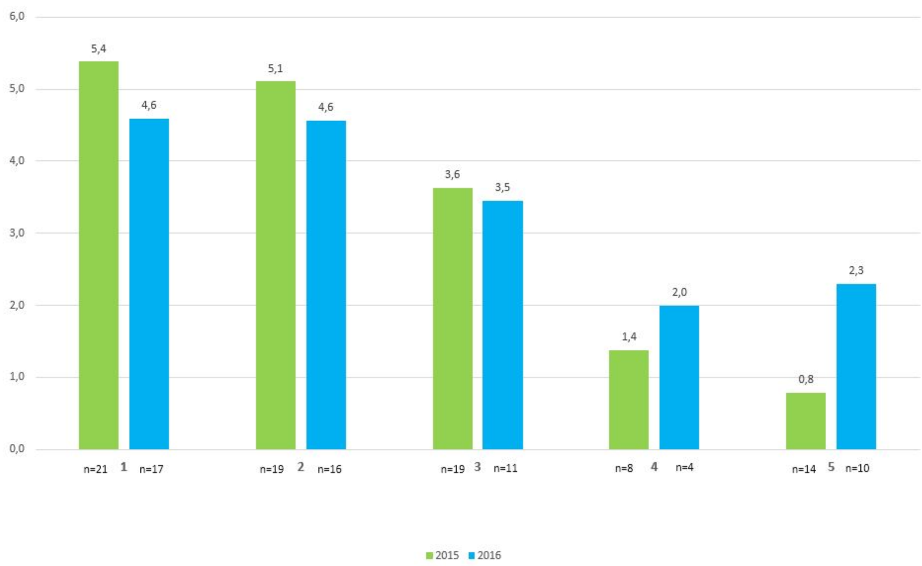
Tutkimukseen osallistuneessa luokassa oli 21 opiskelijaa ja kokeesta nolla pistettä saaneita tai kokeesta kokonaan pois jääneitä opiskelijoita oli neljä, eli noin 19 % opiskelijoista. Kun kokeen laskuista jätettiin pois nämä neljä opiskelijaa, keskiarvoksi kokeelle tuli $27,88$ pistettä mahdollisesta 42 pisteestä (tai 45 pisteestä jos opiskelija teki jokeritehtävän). Vuoden 2016 kokeessa oli 10 tehtävää, joista viimeinen tehtävä oli yhdeksän pisteen arvoinen. Muiden tehtävien maksimipistemäärä oli kuusi. Molempien kokeiden tehtäväkohtaiset keskiarvot näkyvät kuvassa 6.7.



Kuva 6.7 *Kokeiden tehtäväkohtaiset keskiarvot vuosien* 2016 *ja* 2015 *kokeista*

Vuoden 2015 ja 2016 kurssikokeissa oli viisi samanlaista tehtävää. Tehtävät olivat helpohko ensimmäinen tehtävä ja neljä vaikeampaa tehtävää. Kuvassa 6.8 on esitetty toisiaan vastaavien tehtävien pistekeskiarvot kummallekin ryhmälle. Molempien kokeiden ensimmäinen tehtävä oli kolmioihin ja kulmiin liittyvä tehtävä. Tehtävä oli muuten sama molemmissa kokeissa lukuarvoja huomioimatta. Kaikki opiskelijat olivat molemmista ryhmistä vastanneet tähän tehtävään. Kuvassa 6.8 numerolla 2 merkitty tehtävä oli toisessa kokeessa neljäs ja toisessa viides tehtävä. Siihen vastasi vuoden 2016 kokeessa 16 ja vertailuryhmästä 19 opiskelijaa. Numeroilla 3, 4 ja 5 merkityt tehtävät olivat molemmissa kokeissa kokeen loppuosan tehtäviä, ja niihin vastasi järjestyksessä tutkimusryhmässä 11, 4 ja 10 opiskelijaa ja vertailuryhmässä 19, 8 ja 14 opiskelijaa.

Molempien kokeiden tehtävät jaettiin PISA-taitoluokkien mukaisiin tehtävätyyppeihin. Vuoden 2016 kokeessa proseduraalista tiedonhallintaa vaativan PISA1-taitoluokan tyyppisiksi tehtäviksi luokiteltiin neljä ensimmäistä tehtävää ja loput kuusi tehtävää luokiteltiin PISA2-taitoluokan tyyppisiksi tehtäviksi. Vertailuryhmän vuoden 2015 kokeessa tehtävät $1, 2, 3$ ja 5 luokiteltiin taitoluokan PISA1 tyyppisiksi ja loput viisi tehtävää taitoluokan PISA2 tyyppisiksi tehtäviksi. Kuvan 6.8 tehtävät 1 ja 2 ovat siis PISA1- tyyppisiä ja loput PISA2-tyyppisiä tehtäviä. Puhtaasti PISA3-tyyppisiksi tehtäviksi luokiteltuja tehtäviä ei ollut kummassakaan kokeessa. Vuoden 2016 kokeen tehtävissä 8, 9 ja 10 sekä vuoden 2015 tehtävissä 8 ja 9 tarvittiin kuitenkin konseptuaalisen tiedon hallintaa sekä yleistämistä ja oivaltamista, joiden



Kuva 6.8 *Kokeiden tehtäväkohtaisten pisteiden keskiarvot viidestä samanlaisesta tehtävästä*

voidaan ajatella kuuluvan PISA3-taitoluokan tehtäviin. Jaottelun avulla laskettiin otoskeskiarvot ja -varianssit opiskelijoiden saamille pisteille. Tulokset on esitetty taulukossa 6.1.

Vuonna 2015 PISA1-tyyppisten tehtävien keskiarvo (n=21) oli noin $4,2$ ja PISA2-tyyppisistä $2,7$ maksimin ollessa kuusi pistettä. Keskiarvon 95 % luottamusväli PISA1 -tyyppisille tehtäville on $3,3 - 5,0$ ja PISA2 -tyyppisille $1,8 - 3,7$. Vastaavat 95 % luottamusvälit vuonna 2016 (n=17) olivat $4,0 - 5,7$ ja $2,1 - 4,6$. Keskiarvo oli noussut PISA1- tyyppisissä tehtävissä vuonna 2016 noin 13 % ja PISA2-tyyppisissä noin 18 %.

Taulukko 6.1 *Opiskelijoiden koemenestyksen vertailu PISA-taitoluokkien avulla*

	PISA1 2016	**PISA1 2015**	**PISA2 2016**	**PISA2 2015**
Tehtävien pisteiden keskiarvo	4,8	4,2	3,3	2,7
Otosvarianssin keskiarvo	2,7	3,6	6,3	4,7
Otoshajonnan keskiarvo	1,6	1,9	2,4	2,1
Taitoluokan tehtävien lukumäärä	4	4	6	5

Keskimäärin kokeeseen osallistunut opiskelija teki vuoden 2016 kokeessa $3,3$ PISA1

-tyyppistä tehtävää ja $3,6$ PISA2-tyyppistä tehtävää. Vuoden 2015 kokeessa vastaavat keskiarvot olivat noin $3,6$ ja $3,2$. Opiskelijoiden innokkuutta vastata PISA2-tyyppisiin tehtäviin voi tarkastella myös siitä näkökulmasta, kuinka moni vastasi useampaan kuin kolmeen PISA2 -tyyppiseen tehtävään. Vuonna 2015 järjestetyssä kokeessa opiskelijoista noin 38 % valitsi enemmän kuin kolme PISA2-tason tehtävää. Tutkimusryhmästä vuonna 2016 vastaava prosenttiluku oli 41 %. Vastausvaihtoehtoja oli PISA2-taitoluokassa yksi enemmän vuoden 2016 kuin vuoden 2015 kokeessa.

Taulukon 6.1 sekä kuvien 6.7 ja 6.8 perusteella voidaan todeta, että opetuskokeiluun osallistuneet opiskelijat ovat saaneet paremmat pisteet kokeesta kuin aiemman vuoden. Vuoden 2016 kokeen viimeinen (10.) koetehtävä oli saman vuoden pitkän matematiikan ylioppilastehtävä, ja se oli kokeen haastavin tehtävä. Tämän kaltaista tehtävää ei ollut vuoden 2015 kokeessa. Jos kyseinen tehtävä jätetään näistä syistä huomioimatta vertailussa, niin PISA2 -taitoluokan tehtävien pisteiden keskiarvo vuonna 2016 on $3,7$ maksimin ollessa 6. Otosvarianssien keskiarvo on tällöin $5,9$, jolloin otoshajonnan keskiarvo on $2,3$. PISA2-taitoluokassa vuonna 2016 saatujen pisteiden keskiarvo on hieman yli 27 % edellistä vuotta parempi. Tämän tuloksen perusteella näyttäisi siltä, että erityisesti PISA2-tyyppisten tehtävien osaaminen on parempaa tutkimusjaksolla. Myös tehtävien, jotka osittain vaativat PISA3 -taitoluokan taitoja, keskiarvot olivat noin 46 % paremmat vuonna 2016 ($n = 30$) kuin 2015 ($n = 34$). Yksi näistä tehtävistä on molemmissa kokeissa tismalleen sama. Mikäli 10. tehtävä jätetään huomioimatta, on näiden tehtävien keskiarvo noin 56 % parempi vuonna 2016 ($n = 18$).

Kun laskettiin 0, $1-2$, $3-4$ ja $5-6$ pistettä saaneiden opiskelijoiden lukumääriä PISA2-tyylisistä tehtävistä kumpanakin vuonna, saatiin taulukossa 6.2 esitetyt tulokset. Taulukosta nähdään, että esimerkiksi vuoden 2016 kokeessa nolla pistettä PISA2 -tyyppisestä tehtävästä saatiin yhteensä 15 kertaa kun taas vuonna 2015 vastaava lukumäärä oli 23. Ristiintaulukoinnin ja khiin neliö -testin avulla selvitettiin, onko ryhmien välinen ero tilastollisesti merkitsevä.

Taulukko 6.2 *Opiskelijoiden saamat pisteet PISA2-tyyppisistä tehtävistä*

Pisteet	**2015**	%	**2016**	%	**Yhteensä**
0	23	34%	15	25%	38
1-2	5	7 %	12	20%	17
3-4	10	15 %	7	11%	17
5-6	30	44 %	27	44%	57
Yhteensä	68	100 %	61	100 %	129

Ristiintaulukoinnin avulla voitiin laskea myös odotetut frekvenssit ryhmitetyille pisteille. Pisteet ryhmiteltiin niin, että niistä voidaan tutkia ryhmien välistä riippuvuutta. Odotetut frekvenssit on esitetty taulukossa 6.3.

Taulukko 6.3 *Odotetut frekvenssit*

Pisteet	**2015**	%	**2016**	%	**Yhteensä**
0	20	30%	18	30%	38
1-2	9	13%	8	13%	17
3-4	9	13%	8	13%	17
5-6	30	44%	27	44%	57
Yhteensä	68	100%	61	100%	129

Taulukoista 6.2 ja 6.3 nähdään, että eniten eroa ryhmien välillä on pienemmissä pistemäärissä. Khiin neliö -testillä saadaan p-arvoksi noin $0,18$, joten eroa ei voida pitää kovin merkitsevänä. Vastaavasti taulukoiduissa PISA1-tyyppisissä tehtävissä ei ole tilastollisesti merkittävää eroa (p=$0,33$).

7. LUOTETTAVUUSTARKASTELU

Tutkimus pyrittiin toteuttamaan mahdollisimman luotettavasti ottamalla huomioon eri näkökulmia. Tutkimus perustuu opiskelijoiden, opetusharjoittelijan, opettajan ja tuntia seuranneiden opetusharjoittelijoiden näkökulmiin sirkuksen soveltumisesta opetuskäyttöön. Tutkimuksessa pyriittiin myös ottamaan huomioon opetuskokeilun saama kritiikki samalla vakavuudella kuin positiivisetkin kommentit. Tästä huolimatta tutkimustuloksia ei voida pitää yleistettävinä tuloksina, sillä otos oli pieni. Arvosanoja on vertailtu vuotta aikaisempaan ryhmään, josta arvosanojen lisäksi tiedetään ainoastaan sukupuolijakauma. Kyselylomakkeisiin vastattiin omilla nimillä, jotta alku- ja lopputilannetta pystyttäisiin vertailemaan. Opetusharjoittelija painotti molemmissa kyselyissä, että vastauksilla ei ole mitään vaikutusta opiskelijoiden kurssiarvosanaan tai opetusharjoittelijan suhtautumiseen opiskelijaa kohtaan ja että kysely on tärkeä tutkimustyön kannalta.

Tutkimukseen valittiin lukion kurssi, mutta ei opiskelijoita. Opiskelijoita voidaan pitää siis satunnaisesti valittuina pitkän matematiikan opiskelijoina. Sattumalta kävi niin, että tutkimukseen osallistui kolme opiskelijaa, joilla oli ennestään sirkustaustaa. Tämä saattoi nostaa keskiarvoa opiskelijoiden kokemuksesta sirkusopetusmenetelmästä. Myös tutkimuksen saama julkisuus ja muiden normaalikoulun opettajien innostus kokeilusta saattoi vaikuttaa opiskelijoiden mielipiteisiin. Kuitenkaan opiskelijoiden arvosanoihin näillä seikoilla ei todennäköisesti ole vaikutusta. Kurssin aihealue valittiin sen perusteella, mitä matematiikan kursseja Tampereen yliopiston normaalikoulussa järjestettiin tutkimusjakson aikana. Tutkimuksen tekijä ei kokenut geometrian kurssia aihealueena yhtään sen luonnollisempana vaihtoehtona kuin mitään muutakaan aihetta. Tästä huolimatta tuloksia ei voida yleistää kaikkiin lukiokursseihin, eli tämän tutkimuksen tulokset koskevat pitkän matematiikan geometrian kurssia.

Tutkimuksen kyselylomakkeessa opiskelijoilta kysyttiin mielipidettä väitteeseen ”Sirkus tuo lisäarvoa opiskeluun”. Niiden opiskelijoiden, jotka vastasivat väittämään en tiedä, jokseenkin, osittain tai täysin erimieltä, ei tarvinnut perustella vastaustaan. Tällöin kriittistä palautetta saatettiin saada vähemmän kuin mitä olisi saatu, jos myös eriävä mielipide olisi pitänyt perustella. Tämä epäkohta huomioitiin kuitenkin ottamalla tutkimusaineistoksi myös opiskelijoiden yleinen palaute kurssista, johon moni eriävän mielipiteen esittänyt vastasi. Näissä vastauksissa toistui kriittinen palaute learning café -menetelmää kohtaan. Learning café ei kuitenkaan ollut varsinaisesti osa sirkusopetusmenetelmää, vaan opetusharjoittelijan yritys säästää aikaa, jotta kurssilla ehdittäisiin myös pitää kertaustunti. Opiskelijoiden käsitys siitä, mitä sirkus on, saattoi siis vaikuttaa saatuun tulokseen.

Kyselylomakkeen monivalintaväitteissä vastausvaihtoehdot oli valittu symmetrisesti täysin, osittain ja jokseenkin eri tai samaa mieltä. Pelkistä vastausvaihtoehdoista on mahdotonta päätellä, kumpi vastausvaihtoehto on enemmän eri mieltä, osittain eri mieltä vai jokseenkin eri mieltä. Vastausvaihtoehdot olivat kuitenkin samassa järjestyksessä jokaisen väittämän alla ja ne oli laitettu allekkain järjestyksessä täysin eri mieltä, osittain eri mieltä, jokseenkin eri mieltä, en osaa sanoa, jokseenkin samaa mieltä, osittain samaa mieltä, täysin samaa mieltä. Tällöin niiden arvojärjestys on kohtuullisen helposti pääteltävissä. Tässä tutkimuksessa ei ole kuitenkaan kyseisen epäselvyyden vuoksi kiinnitetty huomiota vastausten "jokseenkin" ja "osittain" muuttumiseen toisikseen.

Vuoden 2015 kokeessa oli yksi tehtävä vähemmän kuin vuoden 2016 kokeessa. Tämä vaikutti laskennallisesti luvun 6.4 taulukossa 6.1 esitettyihin arvoihin. Koska kokeiden tehtävät $1-9$ olivat saman tyyppisiä ja sekä vaikeusasteeltaan että taitoluokiltaan samanlaisia, oli perusteltua jättää huomiotta vuoden 2016 viimeinen tehtävä, joka oli muita tehtäviä haastavampi, mutta myös maksimipisteiltään kolme pistettä muita tehtäviä arvokkaampi. Toisaalta opiskelijoilla oli tutkimuskokeilun koetehtävissä enemmän valinnanvaraa, jonka johdosta opiskelija saattoi valita itselleen sopivamman tehtävän edellisvuotta hieman todennäköisemmin. Toisaalta viimeinen tehtävä oli luonteeltaan erilainen kuin muut tehtävät ja se oli huomattavasti haastavampi. Kokeiden vertailu on tämän vuoksi haastavaa ja selkeitä tuloksia suoriutumisesta kokeessa ei voida antaa. Vertailtavat ryhmät saattoivat olla myös lähtökohtaisesti eri tasoisia.

Jaottelu PISA-taitoluokkiin tehtiin tutkimuksen tekijän toimesta. Kokemus taitoluokista on kuitenkin subjektiivinen. Esimerkiksi PISA1-taitoluokan tehtävät on tässä työssä luokiteltu niin kutsutuiksi perustehtäviksi, joissa tarvitaan proseduraalista ymmärtämistä geometrian osalta. Jos opiskelijan aikaisemmissa tiedoissa on aukko jonkin perustiedon kohdalla, tehtävä ei vaadi häneltä proseduraalista osaamista vaan ongelmanratkaisun taitoja ja strategista kompetenssia. Tällöin tehtävä on enemmän PISA2- tyyppinen tehtävä. Luokittelu on kuitenkin tehty tässä tutkimuksessa sillä oletuksella, että opiskelijoiden lähtötiedot ovat kaikilla samat ja perustuvat lukion kahteen ensimmäiseen pitkän matematiikan kurssiin sekä peruskoulun matematiikkaan.

Lukiolaisilla tehdyssä tutkimuksessa huomioitiin sen eettisyys seuraamalla Tampereen yliopiston eettisen toimikunnan ohjeita. Tutkimukseen osallistuminen oli vapaaehtoista, sillä opiskelijoita ei pakotettu vastaamaan tutkimukseen liittyviin kyselyihin. Opetusharjoittelija pyysi opiskelijoita vastaamaan kyselyihin siksi, että se auttaisi häntä tutkimuksessa. Hän painotti opiskelijoille, että vastaaminen on täysin vapaaehtoista. Opetusharjoittelija myös kertoi opiskelijoille tutkimuksesta ja sen toteuttamistavasta. Opiskelijoita ei haluttu altistaa liialle ahdistukselle esiintymisen aiheuttaman jännityksesen vuoksi. Tämän vuoksi arvostelu projekti X:ssä muokattiin siten, että siitä saattoi saada pisteitä esiintymättä luokalle. Näin ollen kohtuutonta rangaistusta ei tullut tehtävän tekemättä jättämisestä näiltä osin. Tutkimus on myös toteutettu opiskelijoiden yksityisyyttä suojaten, eikä heitä voi tunnistaa tutkimuksen tekstistä.

8. POHDINTA

Tutkimuksen kiinnostavimpina tuloksina voisi pitää monivalintakysymyksen "Sirkus toi lisäarvoa opiskeluuni" vastauksia, opiskelijoiden kommentteja avoimeen palautteeseen sekä opiskelijoiden menestystä kurssikokeessa. Monivalintaväitteen sukupuolittain jakautuneet mielipiteet ovat mielenkiintoisia, ja ne herättävät kysymyksiä. Syytä siihen, miksi sirkus toi lisäarvoa opiskeluun useammin tyttöjen mielestä, ei tutkimusaineistosta löydy. Jos opiskelija kertoi olleensa eri mieltä väitteen kanssa, ei se välttämättä kuitenkaan tarkoittanut, että sirkus opetusmenetelmänä olisi ollut huono kokeilu. Osa näin vastanneista opiskelijoista kommentoi sirkuksen olleen *ihan hauska juttu* tai *vaihtelua*, joten kysymyksen termi lisäarvo ehkä ymmärrettiin eri tavalla kuin kysymystä analysoitaessa. Myös sillä, miten monivalintakysymys luetaan ja miten se on ymmärretty, on tärkeä merkitys tutkimuksessa. Jos opiskelija on vastannut, että hän on jokseenkin samaa mieltä väittämän kanssa, tarkoittaako se, että hän on enemmän samaa mieltä väittämän kanssa kuin opiskelija, joka on vastannut olevansa jokseenkin eri mieltä? Tämän näkökulman käsittelemisessä auttavat avoimet palautteet sekä monivalintaa perustelleet palautteet.

Avoimissa kysymyksissä motivaation kasvuun oli viitattu useasti (72 %:ssa vastauksista). Jos tutkimus olisi ollut pidempi, sen vastaajamäärä olisi ollut isompi tai jos motivaatioon liittyvät monivalintakysymykset olisi aseteltu niin, että ne olisivat testanneet opiskelijan omaa käsitystä hänen motivaatiostaan ja sen muutoksesta, olisi motivaation muutoksesta voitu saada enemmän tietoa. Motivaatiosta kertovat nyt opiskelijoiden vastausten lisäksi opettajan ja tunnin tarkkailijoiden kommentit siitä, millä innokkuudella opiskelijat tekivät tehtäviä ja millainen tunnin tunnelma oli. Tutkimuksen tehneen opetusharjoittelijan, luokan oman opettajan ja tuntia seuranneiden opetusharjoittelijoiden mukaan tunnilla innostuneisuus nousi aina kun siirryttiin sirkusaktiviteetteihin. Opiskelijat olivat innostuneita sirkusesimerkeistä ja toiminnallisista tehtävistä ja tuntia seurannut opetusharjoittelija kommentoi, että oppimista näytti tapahtuvan opiskelijoiden huomaamatta. Tällainen tutkiva oppiminen ja toiminnan avulla opiskelu on hieno lähtökohta matematiikan opiskelulle ja siihen on kannustettu joissakin matematiikan oppimista tutkivissa julkaisuissa [40].

Kuparin ja Nissisen tutkimuksessa [40] opetuksessa kehotettiin käyttämään enemmän pelejä, tutkivaa oppimista, konkretisointia sekä opitun liittämistä arkielämään. Sirkus opetustapana tuki kaikkia näitä asioita. Monet tunnilla tehdyt sirkustemput ja tehtävät voidaan nähdä pelillisenä opetuksena, kärrynpyörän mallintaminen tai projekti X tutkivana oppimisena ja tasapainopallon lasikuidun paksuuden laskeminen konkreettisena tapana oppia palloon liittyvää matematiikkaa. Kulma avaruudessa toi matematiikan arkielämään esimerkiksi kiinalaisen tolpan pystyttämiseen liittyvän tehtävän avulla. Tutkimuksen mukaan tämän kaltaisella opetuksella voidaan muun muassa lisätä opiskelijoiden avoimuutta ongelmanratkaisuun. Ryhmän hyvä menestyminen erityisesti PISA2 ja 3 -taitoluokkien tehtävissä voi olla sattumaa, mutta ainakaan haittaa tämän kaltaisesta opetuksesta ei tunnu olevan tutkimuksen tilastollisen tarkastelun valossa. Tämä tulos tukee Kuparin ja Nissisen tulosta. Myös monien opiskelijoiden avoimissa palautteissa esiintuoma motivaation kasvu ja konkretian lisääminen tunneille ovat lupaavia tuloksia, joiden positiivista vaikutusta oppimiseen ei voida kiistää.

Kaikki opetusharjoittelijan saama kritiikki avoimessa palautteessa tuli learning café -menetelmästä. Sekä opetusharjoittelija että kahdella tunnilla rinnakkaisopettajana toiminut toinen opetusharjoittelija kertoivat päiväkirjassa ja palautteessa menetelmän puutteista ja heikkouksista. Learning café ei kuitenkaan ollut osa varsinaista kokeilua, joten siihen suoraan viittaavat kritiikit voidaan jättää huomiotta puhuttaessa sirkuksesta opetusmenetelmänä. Ryhmätyöskentely oli kuitenkin osa opetusmenetelmän ideologiaa, ja ryhmätyöt saivat selkeästi kritiikkiä. Myös projekti X tehtiin ryhmätyönä, ja sen osuus opetusmenetelmästä on kiistaton, sillä projektin ideana oli yhdistää sirkusta ja matematiikkaa. Ryhmätyölle varattiin aikaa jonkin verran tunnilla, mutta pääasiallisesti opiskelijoiden oli tarkoitus tehdä työtä tuntien ulkopuolella. Projektiin kuluva aika korvattiin kuitenkin muutamaan otteeseen antamalla normaalia vähemmän kotiläksyjä. On kuitenkin ymmärrettävää, että lukiolaisten saattaa olla haastavaa löytää tarpeeksi yhteistä aikaa työn tekemiseen, etenkin jos ryhmässä on useita jäseniä.

Tutkimuksessa ei selvästi tullut esille opiskelijatyyppiä, jolle opetus olisi tai ei olisi sopinut paremmin kuin muille. Ainoa ero kokemuksissa oli tyttöjen ja poikien välillä. Kuitenkin niin luokan heikoimmin kuin parhaiten pärjäävät opiskelijat kokivat yhtä lailla sirkuksen tuoneen lisäarvoa opiskeluun. Toisin sanoen opiskelijan menestyksellä kurssikokeessa ei ollut vaikutusta siihen, miten opiskelija koki vastausten perusteella sirkusteemaisen opetuksen. Tämä on rohkaiseva tulos siinä mielessä, että päinvastainen tulos olisi ristiriidassa sirkuksen ideologian kanssa. Johdannossa sirkuksen ideologiaa kuvaillaan siten, että opiskelijoiden erilaisuutta ja erilaisia vahvuuksia tulisi korostaa opetuksessa. Jos sirkusteema olisi suosinut ainoastaan esimerkiksi liikunnallisesti tai matemaattisesti lahjakkaita opiskelijoita, ei tämä ideologinen ajatus olisi käynyt toteen.

Rohkaisevana tuloksena voidaan pitää luvussa 6.4 vertailtuja koetuloksia kahden ryhmän välillä. Tulosten perusteella näyttää siltä, että prosentuaalisesti pienempi osa opiskelijoista sai hylätyn arvosanan kuin vuotta aikaisemmin kokeen tehnyt vertailuryhmä. Kun kymmenes tehtävä jätetään huomioimatta, opiskelijat myös saivat keskimäärin $3,7$ pistettä PISA2-tyyppisistä tehtävistä, joka on noin 27 % edellisvuotta parempi tulos. Vaikka tehtävää 10 ei olisi jätetty huomioimatta, olisi keskiarvo PISA2-tehtävistä ollut parempi. Myös PISA1-tyyppisten tehtävien keskiarvo oli kasvanut. Koetehtävät $8, 9$ ja 10 vuonna 2016 sekä tehtävät 8 ja 9 vuonna 2015 vaativat oivaltamista sekä yleistämistä. Niistä ei suoraan nähnyt, mitä kurssilla opiskeltuja kaavoja niihin voisi soveltaa, ja ne olivat käytännönläheisiä tehtäviä. Näitä tehtäviä ei kuitenkaan voi luokitella PISA3-tehtävätyyppiin, vaikka siihen viittaavia taitoja tehtävissä tarvittiinkin, sillä tehtävät vaativat pääosin kuitenkin PISA2-taitoluokan hallitsemista. Kyseiset tehtävät olivat vaativimmat tehtävät kummassakin kokeessa. Jos tarkastellaan opiskelijoiden vastausten keskiarvoja näiden tehtävien osalta, huomataan, että niiden keskiarvo on huomattavasti korkeampi (46 %) tutkimukseen osallistuneella ryhmällä kuin vertailuryhmällä. Tämän tutkimuksen perusteella näyttäisi siltä, että osaaminen on kehittynyt erityisesti PISA2 ja 3 -taitoluokissa.

Tutkimustulokset ovat hyvin linjassa aikaisempien tutkimusten ja lukion opetussuunnitelman kanssa. Kuten edellä mainittiin, sirkus toteuttaa hyvin ainakin Kuparin ja Nissisen [40] suosituksia matematiikan opetuksesta. Opetushallinnon Liikunta ja oppiminen -tilannekatsauksen [36] mukaan oppitunneilla harjoitetun liikunnan positiiviset vaikutukset näkyvät erityisesti matematiikassa. Tätä tutkimustulosta tukee ainakin Donellyn kollegoineen tekemä tutkimus [10], jossa liikuntaa lisättiin oppituntien lomaan. Tällä perusteella tässä tutkimuksessa käytettiin paljon liikuntaan liittyviä työpajoja. Luokassa oli myös sirkusnurkka, minne opiskelijat saivat mennä vaikka kesken tunnin harjoittelemaan itsekseen sirkustemppuja esimerkiksi jonglöörauspalloilla. Opiskelijat toki selvisivät kurssikokeesta aikaisempien tutkimusten tapaan vertailuryhmää paremmin, mutta koska otos on niin pieni ja tutkimusjakso lyhyt, ei tästä voida vetää muita päätelmiä kuin että tämän kaltainen toiminta ei ainakaan huonontanut oppimistuloksia.

Lukio-opetuksen tulee seurata tarkasti voimassa olevaa lukion opetussuunnitelmaa.

Sirkus opetusmenetelmänä sopi hyvin opetuksen toteuttamismenetelmäksi keväällä 2016 voimassa olleen opetussuunnitelman perusteella. Uusi opetussuunnitelma astui voimaan syksyllä 2016, ja siinä on korostettu edeltäjäänsä enemmän oppiainerajat ylittävää opetusta sekä yhteistyötä. Sirkus opetusmenetelmänä oli oppiainerajat ylittävä menetelmä, sillä tuntien aikana tarvittiin taitoja ainakin liikunnan, fysiikan ja historian tunneilta. Myös esiintymistä sekä viestintää tarvittiin ryhmätöissä ja erityisesti projekti X:ssä. Uudemmassa opetussuunnitelmassa kehotetaan myös kokeilevaan, tutkivaan ja ongelmanratkaisuun perustuviin opetusmenetelmiin. Opetussuunnitelman mukaan merkitykselliset oppimiskokemukset innostavat ja sitouttavat opiskelijaa opiskelemiseen. Sirkus toteutti hyvin kaikkia edellä mainittuja kehotuksia. Esimerkiksi kärrynpyörän mallintamiseen liittyvä työpiste vaati liikunnan yhdistämistä matematiikkaan ja se oli kokeellinen ja tutkiva lähestymistapa. Opiskelijoille kyseinen työpiste oli varmasti myös elämyksellinen ja se kytki opiskelijan tietoja sekä taitoja toisiinsa. Molemmissa opetussuunnitelmissa painotettiin myös oppimaan oppimisen tärkeyttä. Sirkus erikoisena opetusmuotona esitteli opiskelijoille erilaisen oppimistavan ja sai varmasti opiskelijoissakin aikaan pohdintaa siitä, miten itse oppii matematiikkaa parhaiten.

Päätelmänä tutkimustuloksista voisi kuitenkin todeta, että sirkusta voi käyttää geometrian opettamiseen. Vaikka alun perin ajatus saattoi tuntua absurdilta ja kahden maailman yhteensovittaminen haastavalta, kokonaisuus oli yllättävän eheä ja palautteet kokeilusta rohkaisevia niin opiskelijoilta, opettajalta kuin tuntia seuranneilta opetusharjoittelijoilta. Myös tunnit toteuttanut opetusharjoittelija koki onnistuneensa tutkimusjaksolla. Tutkimusjakson jokaisella tunnilla oli sirkusta jossakin muodossa, eikä kukaan kertonut kokeneensa, että se olisi alkanut kyllästyttää. Kriittistä palautetta tuli jonkin verran opetukseen liittyen, mutta se kohdistui lähinnä ryhmätöihin ja aikatauluihin. Tutkimuksessa käytettyjä opetusmenetelmiä, kuten esimerkkejä tai toiminnallisia työpisteitä, voidaan käyttää opetuksessa myös omina kokonaisuuksinaan, mutta toisaalta kokeilua voisi jatkaa koko kurssin mittaiseksi kokonaisuudeksi. Sirkus sopii myös uuden opetussuunnitelman muutoksiin ja tekee matematiikan opiskelusta luovaa, ongelmalähtöistä, motivoivaa ja elämyksellistä.

Sirkus opetusmenetelmänä vaatii vielä syvempiä ja suuremmalla otoksella tehtyjä tutkimuksia, jotta sen vaikutuksesta opiskelijoiden motivaatioon tai edes menetelmän soveltuvuudesta matematiikan opetukseen voidaan antaa selkeitä vastauksia. Tämä tutkimus toimii toivon mukaan kuitenkin tien näyttäjänä ja uusien innovaatioiden sytytysnesteenä. Tämä tutkimus on herättänyt myös uusia kysymyksiä. Jos sirkusta voidaan hyvällä menestyksellä soveltaa geometrian opiskeluun, niin mihin muualle sitä voidaan koulumaailmassa hyödyntää? Entä millainen merkitys sirkuksella ja erityisesti projekti X:llä on opiskelijan käsitykseen matematiikan luonteesta, sen käyttötarkoituksista ja sovelluskohteista? Voisiko sirkusteemaista opetusta viedä vielä pidemmälle, esimerkiksi oppiainerajat ylittäviin kokonaisuuksiin kouluissa? Tämä tutkimus antaa myös viitteitä siitä, että sirkus parantaisi opiskelijoiden matemaattisen argumentaation, mallinnuksen, ongelman asettelun ja ratkaisun taitoja. Nämä taidot viittaavat strategiseen kompetenssiin sekä käsitteelliseen ymmärtämiseen. Jatkotutkimuksilla voitaisiin pohtia, onko näissä havainnoissa kyse näiden taitojen kehittymisestä vai onko tuloksista vastuussa vain pienen otannan aiheuttama poikkeus. Tutkimuksen merkittävä tulos on myös huomio, että opiskelijoiden suoritukset eivät ainakaan huonontuneet, vaikka tunneilla käytettiin huomattavan paljon aikaa sirkustemppujen tutkimiseen ja toteuttamiseen.

9. YHTEENVETO

Tämän tutkimuksen päätavoite oli saada käsitys sirkuksen soveltuvuudesta opetusmenetelmänä matematiikan opiskeluun. Tätä tavoitetta selvittämään valittiin neljä tutkimuskysymystä, joihin haettiin vastauksia sekä laadullisella että tilastollisella analyysillä. Kaksi ensimmäistä tutkimuskysymystä käsittelivät sirkuksen soveltuvuutta matematiikan oppimiseen ja opiskelijoiden kokemusta menetelmästä. Opiskelijat suoriutuivat kurssikokeesta keskimäärin paremmin arvosanoin (noin 9 % parempi keskiarvo) kuin vuotta aikaisemmin kurssin suorittanut vertailuryhmä. Opiskelijat kommentoivat sirkuskokeilua pääosin positiivisesti. He kokivat sirkuksen tuovan opetukseen motivaatiota, vaikuttavuutta sekä konkretiaa. Negatiivisia kommentteja saivat jonkin verran ryhmätyöt ja niihin liittyvä ajan puute. Myös tunteja seuranneet opetusharjoittelijat kokivat sirkuksen opetusmenetelmänä hyväksi ja heidän mielestään opiskelijat tuntuivat olevan innoissaan menetelmästä. Heidän mukaansa oppimista tapahtui tehtävien ohessa opiskelijoiden huomaamatta. Näiden tutkimustulosten valossa ei voi väittää, etteikö sirkus sopisi lukion pitkän matematiikan geometrian kurssille. Sitä, tuoko sirkus matematiikan tunneille jotakin oppimiseen vaikuttavaa ja erityistä, tarkasteltiin kahden viimeisen tutkimuskysymyksen näkökulmasta.

Kolmas tutkimuskysymys käsitteli sirkuksen tuomaa lisäarvoa matematiikan opiskeluun. Tähän kysymykseen saatiin vastauksia opiskelijoiden näkökulmasta sekä tuntia seuranneiden opetusharjoittelijoiden palautteesta. Opiskelijoista 47 % koki sirkuksen tuovan lisäarvoa opiskeluun. 32 % ei ollut samaa mieltä väittämän kanssa. Tästä huolimatta, väitteen kanssa erimieltä olleet saattoivat kuitenkin antaa positiivista palautetta opetusmenetelmästä. Osa väitteen kanssa eri mieltä olleista opiskelijoista eivät ilmeisesti kokeneet motivaation tai vaihtelun tuovan lisäarvoa opiskeluun, sillä he kertoivat sirkuksen kuitenkin tuovan näitä tunnille. Opiskelijat kokivat sirkuksen tuovan positiivista vaihtelua tunnille, auttavan hahmottamisessa, motivoivan, sekä antavan esimerkkejä oppien käyttökelpoisuudesta koulun ulkopuolelta. Luokassa oli 21 opiskelijaa, joista 19 antoi kirjallista palautetta. Avoimet palautteet teemoiteltiin ja niistä nostettiin useimmin toistuvat teemat esiin. Näistä opiskelijoista 13 viittasi palautteessaan sirkuksen lisänneen motivaatiota (motivaation kasvu), 8 opiskelijaa kertoi sen auttaneen hahmottamisessa tai tuoneen tunnille konkretiaa (hahmottaminen ja konkretia) ja 4 opiskelijaa viittasi palautteessaan, että sirkus oli osoittanut, että opiskeltuja asioita voidaan tarvita muuallakin kuin koulussa (vaikuttavuus). Myös tuntia seuranneet opetusharjoittelijat mainitsivat sirkuksen tuoman konkretian ja opiskelijoiden motivoituneisuuden.

Matematiikan osaaminen voidaan jakaa pienempiin osiin. Tässä tutkimuksessa näitä pienempiä osia kutsutaan käsitteelliseksi ymmärtämiseksi, proseduraaliseksi sujuvuudeksi, strategiseksi kompetenssiksi, mukautuvaksi päättelyksi sekä yritteliäisyydeksi. Kaikkia näitä osia ei voida erikseen mitata, sillä ne kietoutuvat toisiinsa erottamattomasti muodostaessaan matematiikan kokonaisvaltaisen osaamisen. Tästä huolimatta, esimerkiksi käsitteellinen ymmärtäminen vaatii opiskelijalta proseduraalista tietoa, jota voidaan testata. Tässä tutkimuksessa matemaattinen osaaminen on jaettu vastaamaan kolmea taitoluokkaan, joita merkittiin PISA1, PISA2 ja PISA3.

Opiskelijoiden kurssikokeessa oli lähinnä PISA1 ja PISA2 -taitoluokan tehtäviä, mutta kokeen viimeisissä tehtävissä oli myös viitteitä PISA3 -taitoluokkaan. Vuoden 2015 ja 2016 koetulosten vertailussa sirkuksen avulla opiskellut ryhmä suoriutui kokeessa hieman edellisvuotta paremmin. Kun kokeen tehtävät jaettiin PISA-taitoluokkiin, huomattiin, että opiskelijoiden tulokset olivat paremmat erityisesti PISA2 ja PISA3 -taitoluokissa vertailuryhmään nähden. PISA2 -taitoluokan tehtävissä opiskelijat saivat noin 27 % paremman keskiarvon vastaavista tehtävistä. PISA3- taitoluokan tehtäviä ei ollut, mutta kokeen viimeisissä tehtävissä vaadittiin oivaltamista tai yleistämistä, jotka on luokiteltu kuuluvaksi PISA3- taitoluokkaan. Näistä tehtävistä sirkuksen avulla opiskelleet opiskelijat saivat 56 % paremman keskiarvon edellisen vuoden ryhmään verrattuna.

Kritiikkiä opetuskokeilusta tuli opiskelijoilta ja tuntia seuranneilta opetusharjoittelijoilta ryhmätöistä ja erityisesti learning café -menetelmästä, jossa asiaa oli ollut liian paljon liian lyhyellä ajalla. Opetusharjoittelija kertoo myös päiväkirjassaan havainneensa saman ongelman. Sirkus opetusmenetelmänä oli tutkimusjaksolla intensiivinen opetustapa, ja ryhmätöihin oli opiskelijoiden mielestä haastavaa löytää aikaa. Ryhmätyöskentelyyn aikaa olisi tarvinnut varata enemmän. Tunneilla, joilla harjoiteltiin sirkusvälineillä tai tehtiin muita sirkukseen liittyviä projekteja, ei mainittu olleen ongelmia ajan kanssa.

Tämän tutkimuksen tulosten perusteella näyttäisi siltä, että sirkus ei ainoastaan sovi opetukseen vaihtelun vuoksi, vaan myös kehittää suhteessa enemmän opiskelijoiden PISA1 ja 2 -taitoluokkien edellyttämiä taitoja. Otos on kuitenkin pieni ja tutkimusjakso liian lyhyt, että tuloksista voisi tehdä yleistettäviä päätelmiä. On siitä huolimatta perusteltua väittää, että sirkus sopii geometrian opetukseen. Opiskelijoiden, opetusharjoittelijan ja sivusta seuranneiden opetusharjoittelijoiden kokemukset ja kommentit sirkuksesta olivat pääosin positiivisia. Opiskelijoiden motivoituneisuus näkyi selkeästi tunneilla ja myös suurin osa heistä mainitsi kyselyssä sirkuksen tuovan vaihtelua tunneille ja lisäävän motivaatiota. Sirkus toteuttaa myös erinomaisesti uuden opetussuunnitelman tavoitteita, arvoperusteita sekä muita kehotuksia. Sirkuksen käyttöä matematiikan opetuksessa voidaan pitää onnistuneena kokeiluna, jonka kehittämistä kannattaa jatkaa ja tutkimista syventää. Sirkus opetusmenetelmänä saattaa avata matematiikan opetukseen kokonaan uuden polun, jossa matematiikkaa opetetaan ongelmalähtöisesti, luovasti, vaikuttavasti, konkreettisesti sekä opiskelijan omia vahvuusalueita hyödyntäen.

LÄHTEET

[1] J.M. Aarts, *Plane and Solid Geometry*, Springer Science+Business Media, 2008.

[2] T. Ahonen, P. Kupari, P. Malinen, P. Räsänen, *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, Niilo Mäki Instituutti, 2004.

[3] H. Anton, I. Bivens, S. Davis, *Calculus*, John Wiley & sons, 2012, p. 768–770.

[4] P. Atjonen, K. Uusikylä, *Didaktiikan perusteet*, Werner Söderström Oy, 2005.

[5] L. Blom, J. Alvarez, L. Zhang & J. Kolbo, *Associations between health-related physical fitness, academic achievement and selected academic behaviors of elementary and middleschool students in the State of Mississippi*, Journal of Research 6(1), 2011, pp. 13–19.

[6] P. Bowell, B. S. Heap, *Prosessidraama - polkuja opettamiseen ja oppimiseen*, Suom. Raija Airaksinen, Pekka Korhonen, Pietari Korhonen, Gummerus Kirjapaino Oy, 2005.

[7] V. Chomitz, M. Slining, R. McGowan, S. Mitchell, G. Dawson & K. Hacker, *Is there a relationship between physical fitness and academic achievement? Positive results from public school children in the Northeastern United States*, Journal of School Health 79(1), 2009, pp. 30–37.

[8] D. Clark, *Euclidean Geometry A Guided Inquiry Approach*, Mathematical Sciences Research institute, 2012.

[9] C. Davis, & S. Cooper, *Fitness, fatness, cognition, behavior, and academic achievement among overweight children: Do cross-sectional associations correspond to exercise trial outcomes?*, Preventive Medicine 52, 2011, pp. 65–69.

[10] J. Donnelly, J. Greene , C. Gibson, B. Smith, R. Washburn, D. Sullivan,K. DuBose, M. Mayo, K. Schmelzle, J. Ryan, D. Jacobsen & S. Williams, *Physical Activity Across the Curriculum (PAAC): a randomized controlled trial to promote physical activity and diminish overweight and obesity in elementary school children*, Preventive Medicine 49(4), 2009, pp. 336–341.

[11] D. Van Dusen, S. Kelder, H. Kohl III, N. Ranjit, & C. Perry, *Associations of physical fitness and academic performance among schoolchildren*, Journal of School Health 81(12), 2011, pp. 733–740.

[12] R. Fenn, *Geometry*, Springer-Verlag London Berlin Heidelberg, 2001.

[13] J. Fiskaali, *Kaksi kosinilauseen 3d-versiota*, Matematiikkalehti Solmu, 2016. Saatavilla: http://matematiikkalehtisolmu.fi/2016/3/3d_kosinilause.pdf

[14] V. Hakala & K. Nieminen, *kurssimateriaalit geometrian kurssille*, 2016. Saatavilla: https://itunes.apple.com/fi/course/geometria-maa3/id1108985001?l=fi

[15] H. Heikkinen, *Pohdintaa draamakasvatuksen perusteista artikkelikokoelmassa Katarsis - draama, teatteri ja kasvatus*, Atena, 2001.

[16] J. Joutsenlahti, *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä*, Tampereen yliopisto, Tampereen yliopistopaino Oy, 2015. Saatavilla: http://uta32-kk.lib.helsinki.fi/bitstream/handle/10024/67453/951-44-6204-1.pdf?sequence=1

[17] L. Kahanpää, *Kuusi ensimmäistä kirjaa Eukleideen alkeista, eli tasogeometria*, Kopi-Jyvä, 2011. Ensimmäinen kirja saatavilla: http://users.jyu.fi/~laurikah/ETG/Eukleides.pdf Viitattu 16.1.2015.

[18] M. Kantomaa, T. Tammelin, H. Ebeling, A. Taanila , *Liikunnan yhteys nuorten tunne-elämän ja käyttäytymisen häiriöihin, koettuun terveyteen ja koulumenestykseen*, Liikunta & Tiede 47(6), 2010, pp.30–37.

[19] J. Kilpatrick, J. Swafford, B. Findell, *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*, National Research Council, 2001. Saatavilla: https://www.ru.ac.za/media/rhodesuniversity/content/sanc/documents/Kilpatrick,%20Swafford,%20Findell%20-%202001%20-%20Adding%20It%20Up%20Helping%20Children%20Learn%20Mathematics.pdf

[20] S. Kivelä, *M niinkuin matematiikka (Iso-M), lukiotason matematiikan tietosanakirja*, MFKA-Kustannus Oy, 2000 Saatavailla: https://matta.hut.fi/matta/isom/isom.pdf. Viitattu 26.9.2016

[21] P. Korhonen, *Draama, teatteri ja kasvatus*, toim. A-L. Østern, Atena kustannus oy, 2001.

[22] P. Kupari & H. Korhonen, *Miten matematiikkaa arvioidaan OECD/PISA - ohjelmassa?*, Dimensio 64 (5), 2000.

[23] M. Lehtinen, *Geometrian perusteita*, 2011. Saatavilla: http://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/geometria2011.pdf

[24] M. Lehtinen, *Geometrian perusteita*, Oulun yliopisto, 2013. Saatavilla: http://cc.oulu.fi/~matlehti/geometria/geom13.pdf Viitattu 1.12.2014

[25] M. Lehtinen, J. Merikoski, T. Tossavainen, *Johdatus tasogeometriaan*, Sanoma Pro, 2007.

[26] *Lukion opetussuunnitelman perusteet* 2003, Nuorille tarkoitetun lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet, Opetushallitus, Vammalan Kirjapaino Oy, 2003. Saatavilla: `http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf`. Viitattu 13.10.2016.

[27] *Lukion opetussuunnitelman perusteet* 2015, Määräykset ja ohjeet 2015:48, Opetushallitus, Next Print Oy, 2015. Saatavilla: `http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf` Viitattu 13.10.2016.

[28] M. Mali, S. Meriläinen, *Draama kaasulakien opetuksessa*, Luma-sanomat, 2003, pp.91-96 Saatavilla: `https://www.yumpu.com/fi/document/view/31344039/pdf-luma-sanomat/37`

[29] A. Owens, K. Barber, *Draamakompassi - prosessidraaman suunnittelu, käytännön työskentely, arviointi ja reflektointi*, Suom. P. Korhonen ja R. Airaksinen, WS Bookwell Oy, 2010.

[30] *Pisa lyhyesti* -verkkosivu, Jyväskylän yliopiston koulutuksen tutkimuslaitos, `https://ktl.jyu.fi/pisa/pisa-lyhyesti`, Viitattu 27.10.2016.

[31] H. Praag, *Exercise and the brain: something to chew on. Trends in Neurosciences*, Elsevier Inc., 2008, pp. 283–289.

[32] C. Roberts, B. Freed, & W. McCarthy, *Low aerobic fitness and obesity are associated with lower standardized test scores in children*, Journal of Pediatrics 165 (5), 2010, pp. 711–718.

[33] Rola Bola. Popscreen. Saatavilla: `https://www.popscreen.com/prod/MTYzMjcxMzEx/Rola-Bola-Rolla-Bolla-Rola-Rola-Rolla-Rolla` Viitattu 9.7.2016

[34] J. Sally, P. Sally Jr, *Geometry: A Guide for teachers*, American Mathematical Society, 2011.

[35] J. Silvester, *Geometry Ancient & Modern*, Oxford University Press, 2001.

[36] H. Syväoja, M.Kantomaa, K.Laine, T. Jaakkola, K.Pyhältö ja T. Tammelin, *Liikunta ja oppiminen*, Opetushallitus ja LIKES-tutkimuskeskus, 2012. Saatavilla: `http://www.studieguiden.fi/download/144729_Liikunta_ja_oppiminen_2.pdf` (Viitattu 4.3.2016)

[37] T. Szalontai, *Joukko-oppia ja logiikkaa -luentomoniste*, Matematiikkalehti Solmu, 2002. Saatavilla: http://matematiikkalehtisolmu.fi/2002/unkari/luento2/indexa.html Viitattu 7.9.2016.

[38] J. Thompson, *Matematiikan käsikirja*, Kustannusosakeyhtiö Tammi, Helsinki, 1994.

[39] K. Väisälä , *Geometria*, Werner Söderstöm osakeyhtiö, 1959. Saatavilla: http://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/geometria.pdf Viitattu 7.9.2016

[40] J. Välijärvi , P. Kupari ym., *PISA - Millä eväillä uuteen nousuun? PISA 2012 tutkimustuloksia*, Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2015:6.

[41] R. Wittberg, L. Cottrell, C. Davis & K. Northrup, *Aerobic fitness thresholds associated with fifth grade academic achievement*, American Journal of Health Education 41(5), 2010, pp. 284–291.

[42] M. Ødegaard (2003) *Dramatic Science. A Critical Review of Drama in Science Education*, Studies in Science Education, 39:1, 2003, pp. 75-101. Saatavilla: http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/03057260308560196

LIITE A.

Nimi:

	Täysin eri mieltä	Osittain eri mieltä	Jokseenkin eri mieltä	En osaa sanoa	Jokseenkin samaa mieltä	Osittain samaa mieltä	Täysin samaa mieltä
Olen hyvä koulussa	1	2	3	4	5	6	7
Olen hyvä matematiikassa	1	2	3	4	5	6	7
Pidän matematiikan opiskelusta	1	2	3	4	5	6	7
Pitkän matematiikan opiskelusta on hyötyä jatko-opinnoissa	1	2	3	4	5	6	7
Pitkän matematiikan opinnoista on hyötyä arkielämässä	1	2	3	4	5	6	7
Geometrian opiskelusta on hyötyä arkielämässä	1	2	3	4	5	6	7
Olen kiinnostunut matematiikasta	1	2	3	4	5	6	7
Tiedän, miten opin matematiikkaa parhaiten	1	2	3	4	5	6	7
Opin matematiikkaa parhaiten matematiikan tunneilla	1	2	3	4	5	6	7
Olen kiinnostunut matematiikasta myös koulun ulkopuolella	1	2	3	4	5	6	7

1. Vastaa väitteeseen ympyröimällä oikea vaihtoehto.

2. Jatka seuraavia lauseita (tarvittaessa voit jatkaa paperin kääntöpuolelle)

    1. Tulen tarvitsemaan kurssilla käsiteltyjä asioita… (missä, miksi?)

    2. Matematiikan opiskelu on tärkeää, sillä…

LIITE B.

Nimi:

	Taysin eri mielts	Osittain eri mielts	Jokseenkin eri mielts	En osaa sanoa	Jokseenkin samaa mielts	Osittain samaa mielts	Taysin samaa mielts
Olen hyvä koulussa	1	2	3	4	5	6	7
Olen hyvä matematiikassa	1	2	3	4	5	6	7
Pidän matematiikan opiskelusta	1	2	3	4	5	6	7
Pitkän matematiikan opiskelusta on hyötyä jatko-opinnoissa	1	2	3	4	5	6	7
Pitkän matematiikan opinnoista on hyötyä arkielämässä	1	2	3	4	5	6	7
Geometrian opiskelusta on hyötyä arkielämässä	1	2	3	4	5	6	7
Olen kiinnostunut matematiikasta	1	2	3	4	5	6	7
Tiedän, miten opin matematiikkaa parhaiten	1	2	3	4	5	6	7
Opin matematiikkaa parhaiten matematiikan tunneilla	1	2	3	4	5	6	7
Olen kiinnostunut matematiikasta myös koulun ulkopuolella	1	2	3	4	5	6	7

1. Vastaa väitteeseen ympyröimällä oikea vaihtoehto.

Jatka seuraavia lauseita (tarvittaessa voit jatkaa paperin kääntöpuolelle)

1. Tulen tarvitsemaan kurssilla käsiteltyjä asioita… (missä, miksi?)

2. Matematiikan opiskelu on tärkeää, sillä…

Sirkus toi lisäarvoa opiskeluuni	-3	-2	- 1	0	1	2	3

3. Jos vastasit edelliseen kysymykseen olevasi osittain, jokseenkin tai täysin samaa mieltä siitä, että sirkus tuo lisäarvoa opiskelullesi, perustele vastauksesi. Muussa tapauksessa voit kirjoittaa vastausruutuun ”-”.

4. Anna vielä Veeralle risuja tai ruusuja opetuksesta:

LIITE C.

Pallo

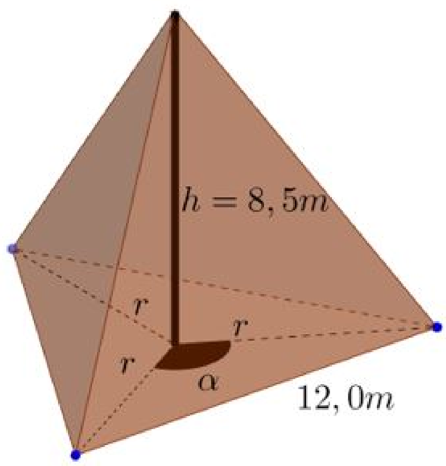
Välineet: henkilövaaka, mitta, lankaa (mittauksen helpottamiseksi), tasapainopallo

1. Arvioi ison pallon tilavuus $\Rightarrow$ mittaa se.

2. Lasikuidun tiheys on noin $2,52\frac{kg}{cm^3}$. Pallo painaa $24kg$. Kuinka paksu kerros lasikuitua on ontossa pallossa? Tehkää laskut selkeästi A4:lle.

Kiinalainen tolppa

Kiinalainen tolppa kiinnitetään sen yläpäästä kolmella liinalla maahan. Maassa olevien kiinnityspisteiden etäisyys toisistaan on $12m$. Jos tolppa on $8,5m$ korkea, niin kuinka suuri ympyrän muotoinen lava esitykseen tarvitaan? Entä kuinka suuri on liinojen välinen kulma (tolpan yläpäästä)?



Kuva 1 *Kiinalaisen tolpan pystyttäminen*

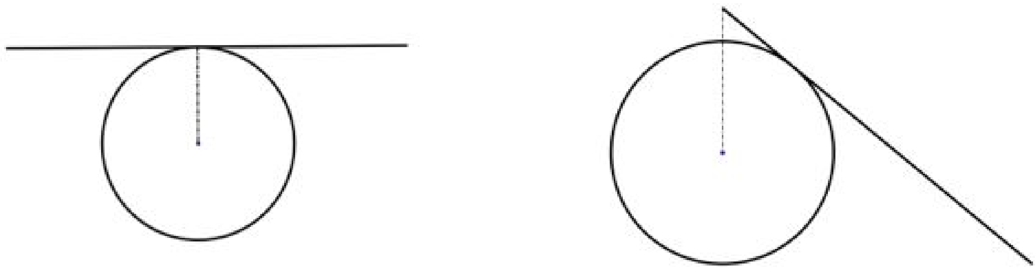
Rolabola

Välineet: Iso rolabola (rulla ja lauta)

1. Laske suuremman rolabolarullan tilavuus.

2. Rolabolataiteilija menee seisomaan rolabolan päälle niin, että laudan keskikohta on suoraan rullan akselin päällä. Hän antaa laudan rullata pois rullan päältä niin, että laudan reuna tulee rullan akselin päälle. Kuinka suuren kulman rulla kääntyy?

Kokeile! Tee laskut ja mittaukset suuremmalla rolabolalla. Tehkää laskut selkeästi A4:lle.



Kuva *2 Rolabola alku- ja loppuasennossa*

Popcornkupit

Välineet: viivoitin, paperia, teippiä

Popcornkuppi: Miten tehdään kaksi erilaista kartion muotoista 1 l popcornkuppia? Suunnitelkaa & tehkää!

Kumpaan kuluu enemmän materiaalia? Tehkää suunnitelma ja laskut selkeästi A4:lle.

LIITE D.

Projekti X ohjeet:

Tee 2-5 hlö ryhmässä matematiikan projekti, joka sisältää ainakin seuraavat asiat visuaalisesti esitettynä:

1. **Geometriaan liittyvä ilmiö tai käsite** jota käsittelette sirkuksen avulla.

2. Projektissa tulisi olla myös jokin geometrian **sovellus tai ongelma**, jonka esittelette luokalle.

3. **Visuaalinen esitystapa.** Esitä matematiikan ongelma visuaalisesti ja näyttävästi. Saat käyttää kameraa, videota, improvisaatiota, musiikkia, välineitä... Tärkeintä on, että esitys on kuvaus myös esiintyjästä itsestään!

4. Jokin aiheeseen liittyvä **sirkusväline/temppu/video jne**, jossa valitsemaanne matematiikan aihetta hyödynnetään/voidaan käyttää.

5. Työstä tehdään myös **kirjallinen osuus**, jonka pituus on 1 sivu/ryhmän jäsen (+ kansilehti ja sisällysluettelo). Selostukset palautetaan viimeistään kokeen pohjatunnille (7.4.). Selostuksessa on esitetty käytetyt kaavat, kuvat ja laskut sekä projektin teoriaosuus.

Työt voivat olla esimerkiksi

- kärrynpyörän matemaattinen mallintaminen (ensimmäisen tunnin esimerkki)
- Piin historia (esimerkiksi draamaesitys)
- käsilläseisonnan kulmien mittaaminen ja analysointi kulmien suuruuden vaikutuksesta asentoon
- fysiikan lukijoille mahdollista pohtia esimerkiksi jonkun tempun aiheuttamia voimia ja vipuvarsia – näiden laskemiseen tarvitaan yleensä ymmärrystä geometriasta
- sirkusvälineen rakentaminen/rakentamisen suunnittelu jne..